Origami of passer en liniaal?

Ilse De Boeck

Inleiding

Iedereen heeft ooit wel eens papier gevouwen, al was het maar een vliegertje of een servet … Origami, de kunst van het papiervouwen, is al erg oud, maar eind vorige eeuw werd origami ook een deel van wiskunde. Wiskundige origami is het onderwerp van deze loep, niet het vouwen van allerlei figuren. We zullen het ook niet hebben over de talrijke toepassingen zoals bv. airbags bij auto's, stents in de geneeskunde, zonnepanelen in de ruimte, …Wie daar meer over wil weten, kan bv. een kijkje nemen op de website van R. Lang (2008).

Over origami valt veel te vertellen. In paragrafen 2 tot en met 7 van deze loep focussen we op gelijkenissen en verschillen tussen de gewone euclidische meetkunde en de origamimeetkunde. We bekijken de mogelijke vouwen en hun tegenhangers binnen de passer-en-liniaalconstructies. We laten zien dat sommige historische constructieproblemen oplosbaar zijn met origamimeetkunde. De bedoeling is vooral om een samenhangend verhaal te brengen. Enerzijds is dit een mooie toepassing van de euclidische meetkunde: passer-en-liniaalconstructies krijgen meer betekenis en plooien komt overeen met spiegelen waardoor deze transformatie opnieuw de revue passeert. Anderzijds maakt het ook duidelijker wat wel en niet mogelijk is binnen de passer-en-liniaalmeetkunde. Door het contrast met de origamimeetkunde wordt de reikwijdte van de euclidische meetkunde helderder afgelijnd (Roelens, 2023). Het biedt daarnaast de kans om een stukje geschiedenis van de wiskunde in de wiskundeles te smokkelen.

Ook in de ons omringende landen wordt origami in het onderwijs gebruikt, zie bv. het artikel van Van Wijk (Van Wijk, 2025). De redenen waarom leerkrachten origami in hun lessen inschakelen, zijn volgens de auteur van dit artikel divers: de kans om hands-on te werken, de kans om wiskunde te visualiseren, beter te begrijpen, of eens op een andere manier te benaderen, de kans om een positieve houding t.o.v. wiskunde te bevorderen en om taken met een low floor/high ceiling te ontwikkelen (taken die eenvoudig starten, maar waarin je ook heel ver kunt gaan). Wij zien het vooral als een kans om te laten zien dat recente wiskunde nog begrijpelijk kan zijn en dat je wiskunde kan gebruiken op onverwachte plaatsen, bijvoorbeeld om zoiets als papiervouwkunst te beschrijven. Hoewel er verbanden zijn met verschillende takken van wiskunde, zullen we toch vooral meetkunde aan bod laten komen.

De activiteiten in paragrafen 2 tot en met 7 van de loep sluiten aan bij meetkunde van de eerste en tweede graad, maar zijn eerder geschikt voor een project in de tweede of derde graad. Je kunt ze koppelen aan de algemene onderwijsdoelen rond redeneren en argumenteren en het beschrijven van fenomenen uit de realiteit met wiskunde. Ze bieden de kans om meetkunde ook in de derde graad meer aan bod te laten komen.

In paragraaf 1 geven we een paar voorbeelden van korte plooiactiviteiten voor de eerste graad die aansluiten bij het onderwijsdoel (6.4) rond het analyseren van meetkundige objecten, waaronder merkwaardige lijnen zoals middelloodlijn en bissectrice, en bij onderwijsdoel (6.7) rond transformaties. Deze kunnen dienen als voorbereiding op het project maar kunnen er ook los van gezien worden.

In paragraaf 4 beschrijven we hoe je de trisectie van een hoek kunt uitvoeren met origami. Hoewel het verklaren hiervan eerder voor leerlingen van de tweede of derde graad is, zou je het plooien in de eerste graad ook zelf kunnen demonstreren en samen met de leerlingen de visuele verklaring uit Tip 3 van de lesactiviteit uit die paragraaf kunnen opbouwen. Dit kan aansluiten bij de lessen rond constructies met passer en liniaal (onderwijsdoel 6.5).

In de tweede graad kan het werkblad rond het vouwen van een parabool uit paragraaf 7 meer betekenis geven aan de parabool als grafiek van een tweedegraadsfunctie. Via analytische meetkunde kun je er de vergelijking van opstellen en laten zien dat die overeenkomt met het voorschrift van een tweedegraadsfunctie. Bij het deel meetkunde van de cirkel kun je de leerlingen eens een cirkel laten plooien … Kan dat eigenlijk wel?

1 Vouwactiviteiten in de eerste graad

1.1 Vouwen en spiegelen – een middelloodlijn vouwen

Zorg voor verschillende kleine blaadjes papier (bv. memoblaadjes) voor de leerlingen en laat ze een lat en een balpen nemen. Je neemt best dunne blaadjes die lichtjes doorschijnend zijn (of goed oud calqueerpapier als je dat nog ergens kunt vinden).

Geef de leerlingen een eerste blaadje papier en laat ze er twee punten op aanduiden. Laat ze goed doordrukken zo dat de punten aan beide zijden van het papier zichtbaar zijn. Vouw nu zodat de twee punten op elkaar terecht komen. Plooi het papier opnieuw open. De onderstaande lesactiviteit beschrijft het onderwijsleergesprek dat zich naar aanleiding van deze opdracht zou kunnen ontspinnen.

LESACTIVITEIT

Een middelloodlijn vouwen

1 Volgens welke rechte werd er geplooid? Controleer door de rechte en het lijnstuk bepaald door de twee punten te tekenen.

✔ *De plooilijn is de middelloodlijn van het lijnstuk.*

2 Met welke transformatie komt dat plooien overeen?

✔ *Plooien komt overeen met (lijn)spiegelen.*

3 Wat gebeurt er als beide punten samenvallen? Probeer uit met een nieuw blaadje papier.

✔ *Dan zijn er oneindig veel plooilijnen mogelijk, namelijk alle rechten door dat punt.*

4 Welke eigenschap van het spiegelen herken je hierin?

✔ *Punten op de spiegelas worden op zichzelf gespiegeld. (Het zijn dekpunten voor de spiegeling.)*

5 Neem een nieuw blaadje en teken een rechte. Plooi zo dat deze rechte op zichzelf terecht komt. Volgens welke rechte heb je geplooid?

✔ *Je kunt plooien volgens elke rechte loodrecht op de gegeven rechte maar ook volgens de rechte zelf (al lijkt dat laatste een beetje flauw).*

6 Welke eigenschap van het spiegelen herken je hierin?

✔ *Rechten loodrecht op de spiegelas en de spiegelas zelf worden op zichzelf gespiegeld.*

1.2 Bissectrices van twee snijdende rechten vouwen

Ook bij het begrip bissectrice kun je een plooiactiviteit inlassen. Geef de leerlingen een vierkant blaadje papier en laat ze er twee snijdende rechten op tekenen (voor- en achterzijde). Deze activiteit kan een interessante instap zijn op het kenmerk van de bissectrices van twee snijdende rechten. De laatste vraag is een extra vraag die het geval van evenwijdige rechten bekijkt.

LESACTIVITEIT

Bissectrices vouwen

1 Plooi de rechten op elkaar. Volgens welke rechte heb je geplooid?

✔ *Volgens een bissectrice van de twee snijdende rechten.*

2 Is er nog een andere mogelijkheid?

✔ *De tweede bissectrice van de twee snijdende rechten.*

3 Hoe liggen deze twee plooilijnen t.o.v. elkaar?

✔ *Ze staan onderling loodrecht.*

4 Waarom?

✔ *De verklaring hiervoor steunt op de definitie van een bissectrice en op de eigenschappen van nevenhoeken en overstaande hoeken.*

5 Wat gebeurt er als de rechten evenwijdig zijn?

✔ *Dan wordt de plooilijn een rechte die evenwijdig is en in het 'midden' tussen de twee gegeven rechten ligt, de middenparallel.*

2 De vouwaxioma's

Vanaf hier starten we met activiteiten die kunnen passen in een project voor de tweede of derde graad. We geven eerst even wat achtergrond. Er bestaan verschillende soorten origami. Wij bekijken de één-vouw-per-keer-origami. Hierbij vertrek je vanuit een gegeven verzameling punten en rechten/vouwen en bekijk je welke nieuwe punten en rechten je kunt verkrijgen door te vouwen. Welke vouwen mogelijk zijn, wordt bepaald door de zogenaamde vouwaxioma's. Het gaat niet over axioma's in de strikte zin van het woord. Sommige vouwen zijn niet altijd mogelijk zoals we verder zullen opmerken of soms zijn er meerdere mogelijkheden.

Een eerste set vouwaxioma's werd opgesteld door Jacques Justin in 1989. Het systeem van Justin bevatte 7 vouwaxioma's. Zes ervan werden, onafhankelijk van hem, door Humiaki Huzita herontdekt in 1992, het zevende in 2002 door Koshiro Hatori. Vervolgens kon Robert Lang (in 2010) aantonen dat deze lijst van vouwen volledig is (zie verder voor wat hiermee bedoeld wordt). In de eerste lesactiviteit hieronder experimenteren we met het beschrijven van een vouw. We zouden dit klassikaal aanpakken. In de tweede zetten we de leerlingen zelfstandig aan het werk met een werktekst om ze te laten ontdekken hoe je tot die 7 vouwen komt.

Je kunt de activiteit klassikaal inleiden door de leerlingen een vierkant blaadje papier te geven. We starten met de vier zijden en de vier hoekpunten (de beginverzameling). Laat de leerlingen de randen overtrekken en de hoekpunten aanduiden en benoemen. Vraag de leerlingen om een vouw te maken door enkel de randen en de hoekpunten te gebruiken.

LESACTIVITEIT

Hoe bepaal je een vouw?

1 Beschrijf welke vouw je gemaakt hebt zodat iemand anders net dezelfde vouw kan maken (zonder meten en door enkel de randen en de hoekpunten te gebruiken).

✔ *Bij leerlingen die volgens een diagonaal gevouwen hebben, of die twee randen op elkaar gevouwen hebben, wordt de vouw uniek bepaald door die beschrijving. Bij leerlingen die een hoekpunt op een rand gevouwen hebben, zijn er oneindig veel vouwen die aan de beschrijving voldoen.*

2 Geef een voorbeeld van een beschrijving waarbij er oneindig veel mogelijkheden voor de vouw zijn.

✔ *Hoekpunt A op de bovenste rand CD vouwen.*

3 Geef een voorbeeld van een beschrijving waaraan maar één vouw voldoet.

✔ *Hoekpunt A op hoekpunt B plooien. De rand AB op de rand CD plooien...*

Als we bij het plooien punten of rechten op elkaar plaatsen, dan spreken we over een positionering. Zo kan je bijvoorbeeld het punt A op de rechte BD plaatsen of positioneren.

Sommige beschrijvingen leiden tot dezelfde vouw: een diagonaal kun je vouwen door de linkerrand AB op de bovenste rand DB of het hoekpunt A linksonder op het hoekpunt D rechtsboven te plooien.

Bij de start zijn er maar 4 randen en 4 hoekpunten die we kunnen gebruiken bij het positioneren. Eenmaal we een vouw gemaakt hebben, kunnen we deze natuurlijk toevoegen aan onze beginverzameling. En als we bijvoorbeeld twee diagonalen geplooid hebben, kunnen we ook het snijpunt ervan aanduiden en verder gebruiken ... Zo kunnen we een hele verzameling van plooien en punten verkrijgen. Die plooien zullen we rechten noemen.

Vraag de leerlingen een plooi door het hoekpunt linksboven te maken.

4 Hoeveel mogelijkheden zijn er?

✔ *Er zijn er oneindig veel, namelijk alle vouwlijnen die door het punt gaan. Dat is dus geen goede beschrijving.*

5 Laat de twee diagonalen vouwen. Zoek nu een vouw die de ene op de andere plooit.

✔ *Hier zijn er twee mogelijkheden, namelijk de middenparallellen van de zijden van het vierkant. Deze vouw zullen we wel toelaten.*

Na deze lesactiviteit kunnen de vier regels bij het vouwen overlopen worden (zie de lesactiviteit hieronder) en kunnen de leerlingen aan de slag onder de vorm van een werktekst om een antwoord te zoeken op de vraag: *welke beschrijvingen van vouwen voldoen aan de regels?*

We geven nog een paar tips mee. Zorg voor voldoende kleine vierkante (memo)blaadjes papier. Laat de leerlingen ook een balpen en lat nemen. Vraag ze om punten en rechten telkens aan de voorkant en de achterkant van het papier aan te duiden zodat ze zichtbaar blijven tijdens het vouwen. Punten kun je eventueel aanduiden door het blad te doorprikken (of door hard op de balpen te drukken), rechten door volgens die rechte te plooien en met een lat over de plooi te gaan. Het overzicht van de verschillende vouwen op het einde van de lesactiviteit kan nadien afgedrukt worden zodat de leerlingen het bij de hand hebben voor de andere activiteiten.

LESACTIVITEIT

De vouwaxioma's

Origami, of de kunst van het papiervouwen, je hebt er vast al wel eens van gehoord. Maar wist je dat je die origami ook met wiskunde kunt beschrijven?

Er bestaan verschillende soorten origami. We hebben het hier over één-vouw-per-keer-origami. Daarbij vertrek je van een vierkant (of eindig) blad papier zonder markeringen. Enkel vouwen is toegelaten, dus niet knippen. We gebruiken de woorden vouwen en plooien door elkaar, net zoals vouw en vouwlijn. Ze betekenen in deze tekst dus hetzelfde. Vouwlijnen duiden we in de figuren steeds met een (rode) stippellijn aan.

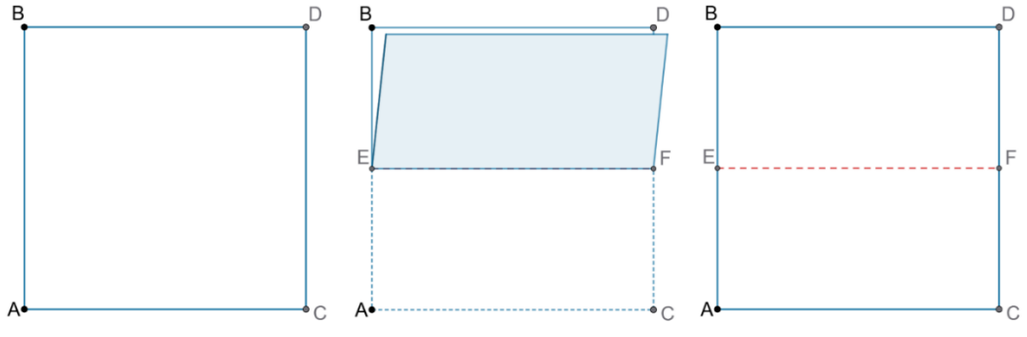
De basisbegrippen (grondbegrippen) bij origami zijn punten en rechten. We nemen de volgende regels aan:

- **R1:** Alle rechten worden bepaald door de randen van het vierkant of door een vouw.
- **R2:** Alle punten worden bepaald als snijpunt van twee rechten of als beeldpunt van een punt na plooien.
- **R3:** Alle vouwen moeten bepaald worden door combinaties van punten en rechten die op elkaar gelegd worden (positioneringen) zo dat er slechts een eindig aantal mogelijkheden voor de vouw zijn.
- **R4:** Een vouw wordt gemaakt door een enkele plooi te maken en terug open te plooien.

Deze laatste regel zegt eigenlijk dat je maar één vouw per keer mag maken.

Neem een vierkant blad papier, overtrek de randen en benoem de hoekpunten zoals op de figuur.

1 Vouw de onderste rand van het blad, AC, op de bovenste rand, BD. Dit kan op juist één manier. Daardoor ontstaat een nieuwe rechte, namelijk EF, de middenparallel van de bovenste en onderste rand. Er zijn echter nog andere positioneringen om deze vouw te bepalen vertrekkend vanuit de vier gegeven punten en de vier gegeven rechten. Welke?



✔ *De middenparallel EF kan bepaald worden:*

- *door de onderste rand AC op de bovenste BD te plooien of andersom, maar ook*
- *door het hoekpunt A op het hoekpunt B te plooien of andersom,*
- *door het hoekpunt C op het hoekpunt D te plooien of andersom.*

Door deze vouw ontstaan twee nieuwe punten, namelijk de snijpunten E en F van deze vouw met de randen. Duid ze aan. We hebben nu 6 punten en 5 rechten. En zo zou je de verzameling punten en rechten steeds verder kunnen uitbreiden.

We gaan nu wat dieper in op de derde regel (R3).

2 Vouw het hoekpunt A op de bovenste rand BD. Hoeveel mogelijkheden heb je om dat te doen?

✔ *Er zijn oneindig veel mogelijkheden.*

Een omschrijving zoals "vouw het hoekpunt A op de bovenste rand BD" of meer algemeen een positionering zoals "vouw een punt op een rechte" voldoet dus niet aan de derde regel. We gaan op zoek naar alle omschrijvingen van vouwen die aan de vier regels voldoen.

3 Start met het maken van een lijstje van alle mogelijke positioneringen, dus ook degene die niet aan de derde regel voldoen. Let op: een punt op een ander punt vouwen is niet hetzelfde als een punt op zichzelf vouwen.

✔ *Er zijn 5 mogelijke positioneringen:*

- *je kunt een punt op zichzelf plooien,*
- *je kunt een punt op een ander punt plooien,*
- *je kunt een punt op een rechte plooien,*
- *je kunt een rechte op zichzelf plooien,*
- *je kunt een rechte op een andere rechte plooien.*

Het is duidelijk dat er oneindig veel mogelijke vouwlijnen zijn als je een punt op zichzelf plooit, namelijk alle vouwlijnen door dat punt. Een vouw die een punt op zichzelf plooit, voldoet dus niet aan de derde regel. Er is daarom een bijkomende positionering nodig, bv. dat de vouwlijn tegelijk ook door een tweede punt gaat. Als je een punt op een ander punt plooit daarentegen, is de vouwlijn wel uniek bepaald, namelijk als middelloodlijn van het lijnstuk. Deze vouw voldoet dus wel aan de regel.

De zogenaamde 'vouwaxioma's' geven alle mogelijke minimale verzamelingen van positioneringen waarmee je een vouw kunt beschrijven zo dat er slechts een eindig aantal mogelijkheden voldoen. Met "minimaal" wordt bedoeld dat we geen overbodige voorwaarden toevoegen. Het woord axioma is hier misschien niet zo goed gekozen aangezien het niet echt over axioma's gaat. Het zijn eerder soorten basisoperaties op punten en rechten, waardoor telkens nieuwe rechten en punten ontstaan vanuit de beginverzameling. Ze worden echter traditioneel axioma's genoemd.

Als we de 5 positioneringen van hierboven bekijken, zijn er twee die direct aanleiding geven tot een vouwaxioma:

- je kunt een punt op een ander punt plooien (V2),
- je kunt een rechte op een andere rechte plooien (V3).

De letter-cijfercombinaties tussen de haken refereren aan de nummering van de axioma's door Lang. We zullen ze verder gebruiken om naar de vouwaxioma's te verwijzen.

Om de andere vouwaxioma's te vinden, nemen we een combinatie van twee van de overblijvende positioneringen. Hieronder zie je een tabel met alle mogelijke combinaties. We gaan er bij deze tabel van uit dat de punten P en Q verschillend zijn, net zoals de rechten l en k.

4 Probeer telkens uit met een blaadje papier of ze een vouwaxioma bepalen. Bij het vakje links boven moet je bv. twee verschillende punten P en Q op je blaadje plaatsen en nagaan of je een vouwlijn kunt vinden zo dat punt P op zichzelf geplooid wordt én tegelijk punt Q op zichzelf geplooid wordt.

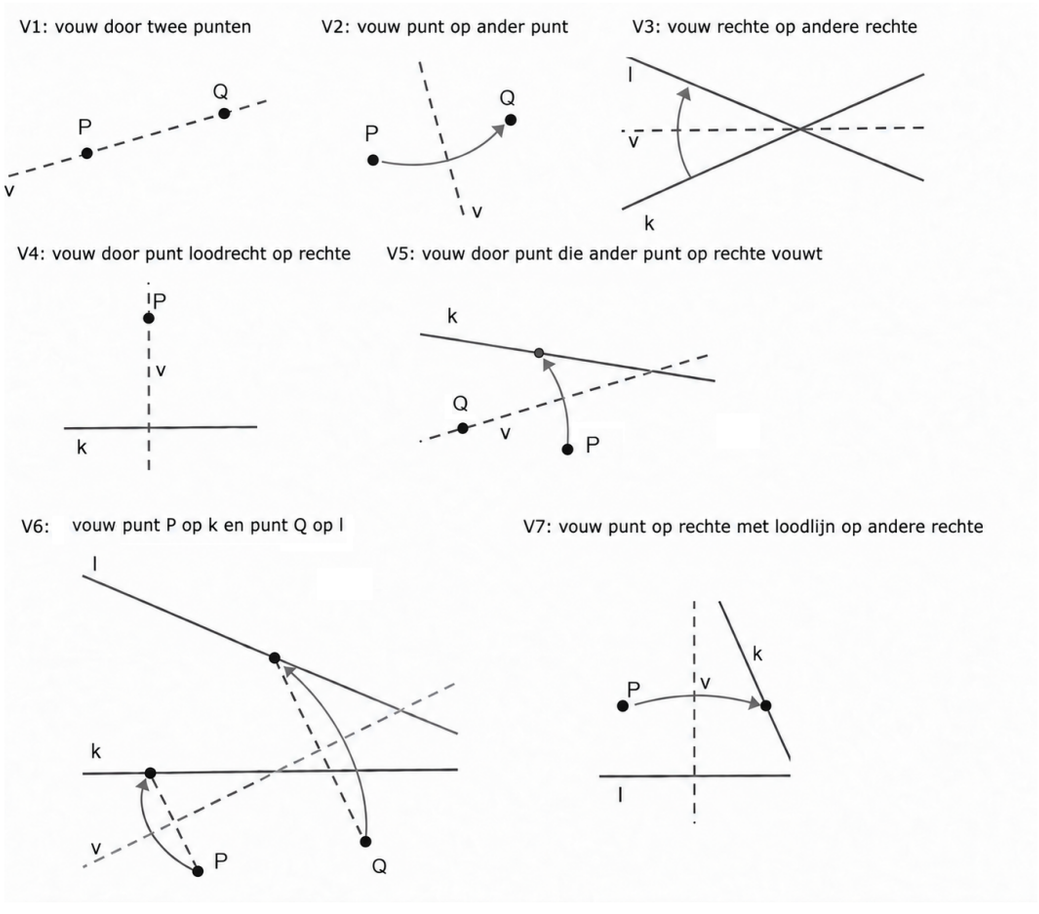
	Punt P op zichzelf	**Rechte k op zichzelf**	**Punt P op rechte k**
Punt Q op zichzelf			
Rechte l op zichzelf			
Punt Q op rechte l			

✔ *Deze combinaties geven nog vijf andere vouwaxioma's (zie ook onderstaande figuur):*

- *je kunt een vouwlijn vinden die door twee verschillende punten gaat (V1),*
- *je kunt een vouwlijn vinden loodrecht op een gegeven rechte die door een gegeven punt gaat (V4),*
- *je kunt een vouwlijn vinden die door een gegeven punt gaat en een tweede punt op een gegeven rechte plooit (V5),*
- *je kunt een vouwlijn vinden die een eerste punt op een eerste rechte plooit en tegelijk een tweede punt op een tweede rechte (V6),*
- *je kunt een vouwlijn vinden die loodrecht op een eerste rechte staat en tegelijk een gegeven punt op een tweede rechte plooit (V7).*

	Punt P op zichzelf	**Rechte k op zichzelf**	**Punt P op rechte k**
Punt Q op zichzelf	*V1*	*V4*	*V5*
Rechte l op zichzelf	*V4*	*/*	*V7*
Punt Q op rechte l	*V5*	*V7*	*V6*

Er zijn dus zeven vouwaxioma's. Hierna zie je ze visueel voorgesteld. Probeer ze allemaal uit. Neem telkens een nieuw blaadje papier.



3 Verbanden tussen vouwlijnen en constructies uit de euclidische meetkunde

Bij de verkenning van de vouwaxioma's voor de origamimeetkunde, herkenden we verschillende merkwaardige lijnen en begrippen uit de gewone vlakke euclidische meetkunde. We gaan nu dieper in op deze verbanden.

De basisconstructies voor origamimeetkunde bepalen vouwlijnen, dus rechten. De basisconstructies binnen de euclidische meetkunde zijn rechten en cirkels die je kunt construeren met passer en liniaal. Dit construeren met passer en liniaal kent een lange geschiedenis. De oorsprong gaat terug tot de *Elementen van Euclides*, geschreven rond 300 v.C., een samenvatting van de elementaire wiskundige kennis tot die tijd in 13 boeken, zowel over vlakke meetkunde als ruimtemeetkunde, verhoudingen, … Deze *Elementen* vormden eeuwenlang de basis voor het meetkundeonderwijs in de Westerse wereld. De hele meetkunde wordt er (bijna) zuiver deductief opgebouwd, vertrekkend vanuit een klein aantal grondbegrippen en "basisinzichten" of axioma's. Elke stelling moet je bewijzen, elk nieuw begrip definiëren. De enige begrippen waarvan je het bestaan mag aannemen, zijn de rechte lijn (die je met een liniaal tekent) en de cirkel (waarvoor je een passer gebruikt). Nieuwe begrippen moet je niet enkel definiëren, je moet ook telkens aantonen dat ze bestaan door ze te construeren met passer en liniaal. Die laatste voorwaarde heeft eeuwenlang aanleiding gegeven tot wiskundig onderzoek. Drie constructieproblemen springen daarbij in het oog:

- de trisectie van een hoek: gegeven een hoek, verdeel die in drie even grote hoeken met passer en liniaal,
- de verdubbeling van een kubus: gegeven een kubus, construeer een kubus waarvan het volume

het dubbele is,

- de kwadratuur van een cirkel: gegeven een cirkel, construeer een vierkant met dezelfde oppervlakte.

Pas in de 19de eeuw werd bewezen dat deze constructies niet mogelijk zijn met enkel passer en liniaal. Er werden wel verschillende vernuftige andere methodes gevonden, bv. met krommen zoals de quadratrix van Hippias om een cirkel te kwadreren, de conchoïde van Nicomedes om een kubus te verdubbelen en een hoek in drie gelijke delen te verdelen, of met een neusis (een liniaal met één lijnstuk met een bepaalde lengte op aangeduid) om een hoek in drie te verdelen. Die laatste methode wordt aan Archimedes toegeschreven. Wil je daar graag meer over weten, neem dan eens een kijkje op de website van H. Hofstede (zie bronnen).

Het construeren met passer en liniaal vind je terug in de onderwijsdoelen van de eerste graad (onderwijsdoel 6.05) en in sommige leerplannen bij het keuzeonderdeel over de cirkel in de tweede graad. De verklaring voor de trisectie van een hoek via origami die we in paragraaf 4 zullen bekijken, steunt op congruentie van driehoeken en de eigenschappen van spiegelingen. Voor de verdubbeling van de kubus uit paragraaf 5 moeten de leerlingen vertrouwd zijn met de stellingen van Pythagoras en Thales en moeten ze beschikken over de nodige algebraïsche vaardigheden, o.a. het rekenen met evenredigheden en rationale vormen.

In deze paragraaf bespreken we de construeerbaarheid van de vouwlijnen met passer en liniaal. De rechten die via vouwen ontstaan, zijn construeerbaar behalve die bij de zesde vouw. Voor een aantal vouwen hebben we daarvoor een lesactiviteit uitgewerkt, die je hieronder vindt. Voor een aantal andere vouwen is dit vrij evident. Je zou dit dus klassikaal kunnen aanpakken en op die manier een aantal constructies herhalen. De constructie van een rechte door twee gegeven punten, van de middelloodlijn van een lijnstuk, van de bissectrices van twee snijdende rechten zijn gekend vanuit de eerste graad. Die van een loodlijn door een punt op een gegeven rechte (door twee punten op de rechte te bepalen die even ver liggen van het gegeven punt en daarna de constructie van de middelloodlijn te gebruiken), van het midden van een lijnstuk (via de middelloodlijn) en van een evenwijdige aan een gegeven rechte door een gegeven punt (als een loodlijn op een loodlijn) komen vaak voor in oefeningen op het construeren met passer en liniaal maar kun je best bespreken. Dit overlopen we hier kort.

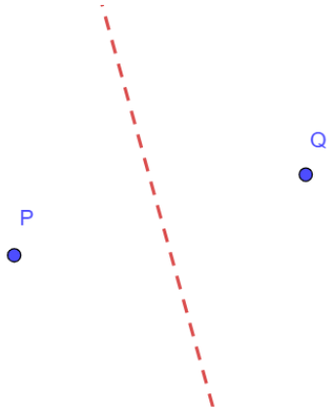
V1: *Je kunt een rechte vouwen die door twee verschillende punten P en Q gaat.*

Je vouwt dus de punten P en Q op zichzelf. De vouwlijn is de rechte PQ. Uiteraard kun je deze met een liniaal construeren.



Merk op dat de punten P en Q niet mogen samenvallen omwille van de derde regel (R3).

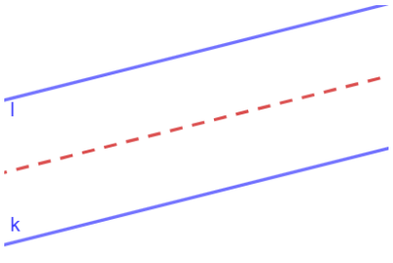
V2: *Je kunt een gegeven punt P plooien op een ander gegeven punt Q.*



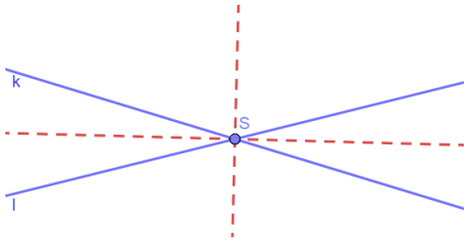
De vouwlijn is de middelloodlijn van $[PQ]$. Ze is uniek en construeerbaar met passer en liniaal. Ook hier mogen de punten niet samenvallen omwille van de derde regel (R3).

V3: *Je kunt een gegeven rechte k plooien op een andere gegeven rechte l.*

Voor evenwijdige, niet-samenvallende rechten is de vouwlijn de middenparallel van die twee rechten.

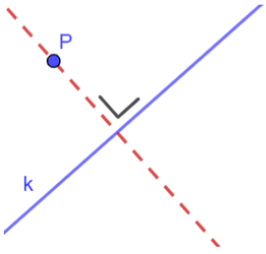


Voor snijdende rechten zijn er twee mogelijke vouwlijnen, namelijk de bissectrices van deze snijdende rechten. Deze zijn onderling loodrecht. Ze zijn construeerbaar met passer en liniaal. Het is geen probleem dat er twee vouwen zijn die aan de beschrijving voldoen (R3). Het aantal vouwen moet enkel eindig zijn.



Merk op dat de rechten niet mogen samenvallen omdat anders de rechte zelf en elke vouwlijn die loodrecht op de rechte staat, voldoen.

V4: *Er bestaat een vouw loodrecht op een gegeven rechte k die door een gegeven punt P gaat.*



De vouwlijn is de loodlijn door P op de rechte k. Ook deze is construeerbaar met passer en liniaal. Ze is uniek. Je kunt ze gebruiken om een rechte hoek te plooien. Merk op dat deze vouw ook toelaat om een evenwijdige te plooien als een loodlijn op een loodlijn.

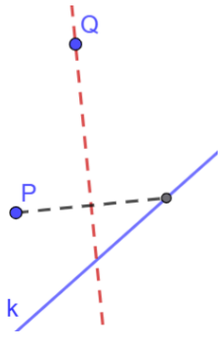
De volgende vouwen zijn minder evident en hebben we uitgewerkt in een aantal lesactiviteiten. Vouwlijnen V5 en V7 zijn construeerbaar met passer en liniaal, maar de Belochvouw V6 is dat niet. Je kan deze best eens laten uitproberen voor verschillende liggingen van de punten en de rechten. In paragraaf 7 over de Belochvouw geven we uitleg hoe je dit met GeoGebra zou kunnen aanpakken. Op de website vind je een filmpje over deze vouw.

LESACTIVITEIT

Constructie van de vouw (V5) door een gegeven punt die een ander punt op een gegeven rechte plooit

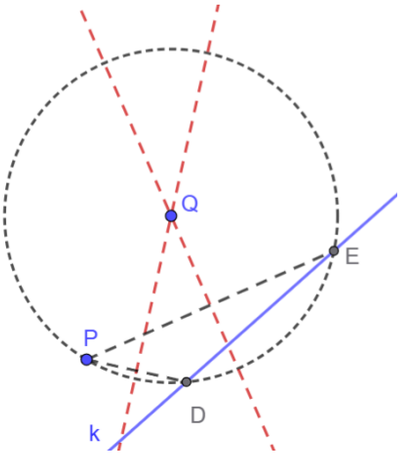
Bekijk de volgende vouw. Voer ze eerst uit met een blaadje papier.

V5: *gegeven een rechte k en twee verschillende punten P en Q, dan bestaat er een vouw die door Q gaat en punt P op de rechte k plooit.*



1 Hoe kun je deze vouwlijn construeren met passer en liniaal? Tip: doe alsof je de oplossing kent en redeneer van achter naar voor. Is er steeds een oplossing? Hoeveel mogelijke oplossingen zijn er?

✓ *Stel dat het beeldpunt van P na plooien op een punt D van de rechte k terecht komt, dan moet de plooilijn de middelloodlijn van $[PD]$ zijn. Door het kenmerk van de middelloodlijn liggen de punten P en D dan beide even ver van punt Q, m.a.w. D ligt op $c(Q, |PQ|)$. Als de cirkel de rechte k in twee punten snijdt, D en E, zijn er twee mogelijke vouwlijnen, namelijk de middelloodlijnen van $[PD]$ en van $[PE]$. Je construeert dus eerst $c(Q, |PQ|)$ en bepaalt de snijpunten D en E met de rechte k. Daarna gebruik je de constructie van de middelloodlijnen van $[PD]$ en van $[PE]$.*



✔ *In het geval de cirkel de rechte raakt, is er slechts één mogelijke oplossing. Dat is zo als $|PQ| = d(Q,k)$. In het geval $|PQ| < d(Q,k)$ is er geen oplossing.*

2 Wat gebeurt er als P op de rechte k ligt?

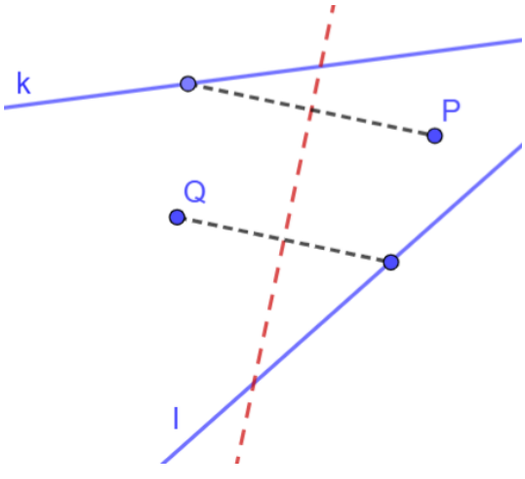
✔ *Dan valt D samen met P. De ene vouwlijn is dan de rechte PQ. De andere vouwlijn is de loodlijn door Q op de rechte k. Beide zijn construeerbaar. Dit geldt ongeacht of Q wel of niet op k ligt.*

LESACTIVITEIT

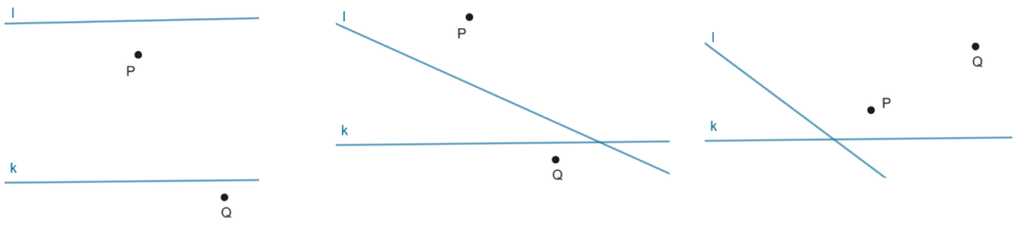
De Belochvouw (V6)

De volgende vouw is een zeer speciale vouw waarvoor geen analoge constructie bestaat in de euclidische meetkunde. Ze werd vernoemd naar Margharita Beloch die ze in 1936 gebruikte om aan te tonen dat je met origamimeetkunde derdegraadsvergelijkingen kunt oplossen. Deze vouw is niet altijd mogelijk als je met een eindig blad papier werkt. Neem een vierkant blad papier en probeer ze uit voor verschillende liggingen van de punten en de rechten.

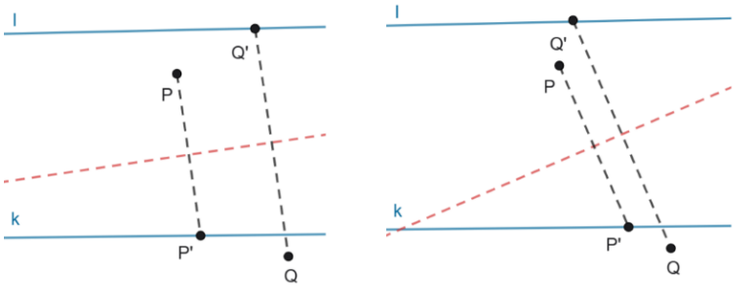
V6: (Belochvouw) *Gegeven twee verschillende rechten k en l en twee verschillende punten P en Q, dan bestaat er een vouw die tegelijk punt P op de rechte k vouwt en punt Q op de rechte l.*



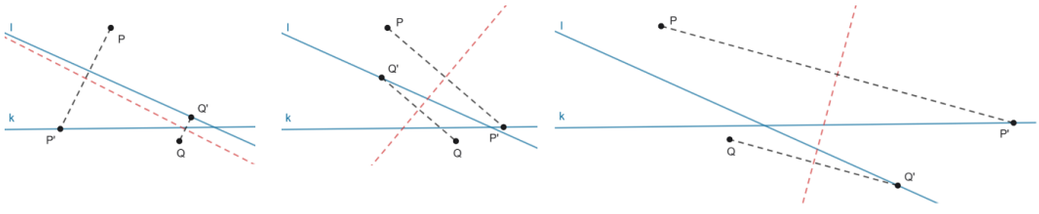
1 Probeer bij volgende liggingen van de punten en de rechten te tekenen waar de vouw ongeveer moet terecht komen. Je kunt het uitproberen met een blaadje papier. Probeer P al op een punt van de rechte k te vouwen en verschuif dan tot ook Q op l terecht komt. Soms zijn er meerdere oplossingen mogelijk maar het is voldoende als je er één vindt.



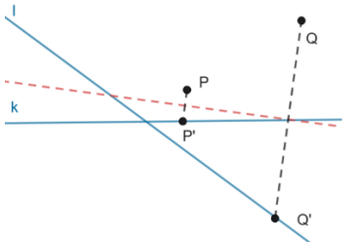
✔ *Bij de eerste ligging zijn er twee oplossingen.*



✔ *Bij de tweede ligging zijn er drie oplossingen. Als je ze met een vierkant blad papier probeert te vinden, kunnen ze soms buiten het blad vallen.*



✔ *Bij de derde ligging is er slechts één oplossing.*

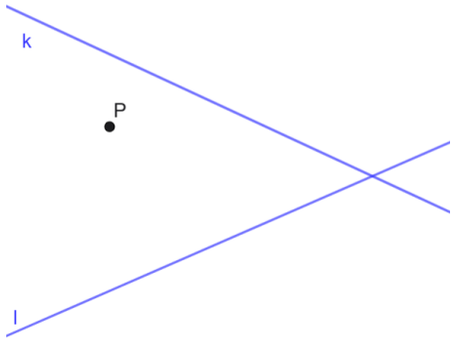


LESACTIVITEIT

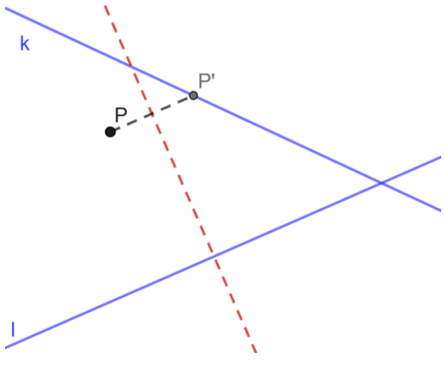
Constructie van de vouw (V7) die een gegeven punt op een gegeven rechte plooit en tegelijk loodrecht op een tweede gegeven rechte staat

V7: *gegeven een punt P en twee snijdende rechten l en k dan bestaat er een vouw die loodrecht staat op de rechte l en die punt P op de rechte k afbeeldt.*

1 Hoe kun je deze vouwlijn bepalen? Neem een blaadje papier, teken er twee snijdende rechten op en een punt zoals op de figuur hierna en probeer de vouw te vinden. Bedenk daarna een bijpassende constructie.



✔ *De rechte door P en zijn beeldpunt moet loodrecht staan op de plooilijn, net zoals de rechte l. Bijgevolg is de rechte door P en zijn beeldpunt evenwijdig met l. Construeer dus de evenwijdige door P met l (door eerst de loodlijn r in P op l te construeren en daarna de loodlijn in P op r) en neem het snijpunt P' met k. De vouwlijn is de middelloodlijn van $[PP']$. Deze is construeerbaar met passer en liniaal.*



2 Kun je ook zo'n vouwlijn vinden als de rechten k en l evenwijdig zijn?

✔ *Bij evenwijdige rechten k en l kun je zo'n vouwlijn niet meer vinden tenzij P op k ligt. Immers, de vouwlijn moet loodrecht staan op l en dus ook loodrecht op k. Het punt P kan dan enkel op k geplooid worden als het al op k ligt. Maar in dat geval hebben we opnieuw oneindig veel mogelijkheden, wat niet mag volgens R3.*

3 Bedenk een manier om de vouwlijn te vinden door de andere vouwen te combineren (in het geval van snijdende rechten).

✓
- *V4: plooi de rechte r door P loodrecht op l.*
- *V4: plooi de loodlijn h door P op r (je krijgt dus een evenwijdige door P met l).*
- *Bepaal het snijpunt P' van h en k.*
- *V2: plooi de middelloodlijn van $[PP']$. Dit is de gezochte vouw.*

De zesde vouw zorgt ervoor dat twee van de drie constructieproblemen die niet oplosbaar zijn met passer en liniaal, wel oplosbaar worden binnen origamimeetkunde. Dat werken we uit in de volgende twee paragrafen.

4 Trisectie van een hoek met origami

De methode om een hoek in drie gelijke delen te vouwen, komt van de Japanse wiskundige Hisashi Abe en dateert uit 1980. Bij de lesactiviteit hieronder hoort een filmpje, dat je op onze website vindt.

Bij de plooiconstructie die meestal getoond wordt, snijdt het tweede been van de hoek (l_2) de bovenste rand van het vierkant blad papier (zie de figuur bovenaan links in de lesactiviteit). Dat betekent dat de hoek tussen 45° en 90° ligt. Voor hoeken kleiner dan 45° valt de constructie buiten het vierkant origamiblaadje en heb je een rechthoekig blad nodig, maar de constructie blijft werken. Dit is een activiteit die ook al in de eerste graad zou kunnen gebruikt worden als je direct start met het geven van de laatste of voorlaatste figuur waarbij de congruente driehoeken of de gespiegelde driehoeken reeds zichtbaar zijn. Afhankelijk van je klas en leerlingen kun je meer of minder tips voorzien.

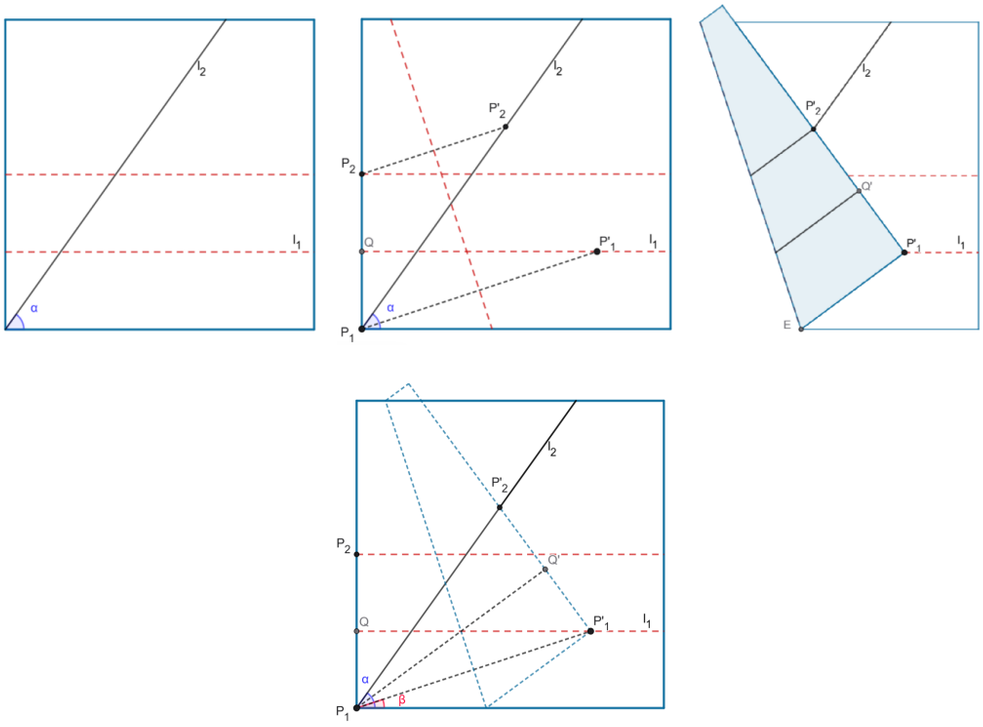
LESACTIVITEIT

Trisectie van een hoek met origami

Met dit werkblad leer je een hoek in drie gelijke delen te verdelen met origami. Dat gaat als volgt.

Neem een vierkant blaadje papier. Als hoekpunt van de hoek nemen we het hoekpunt links beneden. We noemen dit P_1. De onderste rand van het blaadje is het eerste been van de hoek α in de linkse figuur hieronder. Neem een punt van de bovenste rand en verbind dat met het hoekpunt. Dit is het tweede been van de hoek. Voer nu de volgende vouwinstructies uit.

- Plooi de onderste rand van het blad op de bovenste (V3).
- Plooi de onderste rand van het blad op de vouwlijn uit de vorige stap (V3). Je hebt nu twee vouwlijnen gemaakt: een op halve hoogte en een op één vierde van de hoogte (l_1). Zie de figuur bovenaan links. Noem de snijpunten van deze vouwlijnen met de linkerrand P_2 en Q.
- Nu gebruiken we de speciale vouw V6. Plooi het hoekpunt P_1 op de onderste vouwlijn l_1 en tegelijk P_2 op het tweede been l_2 van de hoek. Zie de middelste en rechtse figuur bovenaan.
- Verbind het hoekpunt P_1 met zijn beeldpunt P_1' na plooien. Zie de figuur onderaan.
- De hoek β is dan de gezochte hoek (zie de figuur onderaan).



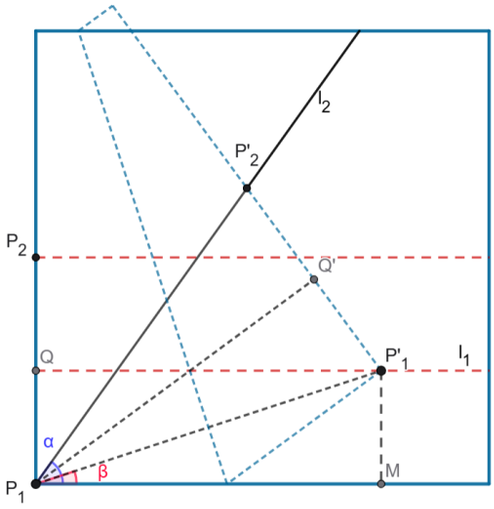
1 Toon aan dat de hoek β inderdaad gelijk is aan één derde van de hoek α.

Tip 1

Duid alle gegevens die je kunt afleiden uit het plooien aan op de figuur, bv. even lange lijnstukken, rechte hoeken, … Denk aan de eigenschappen die bewaard blijven bij het plooien/spiegelen.

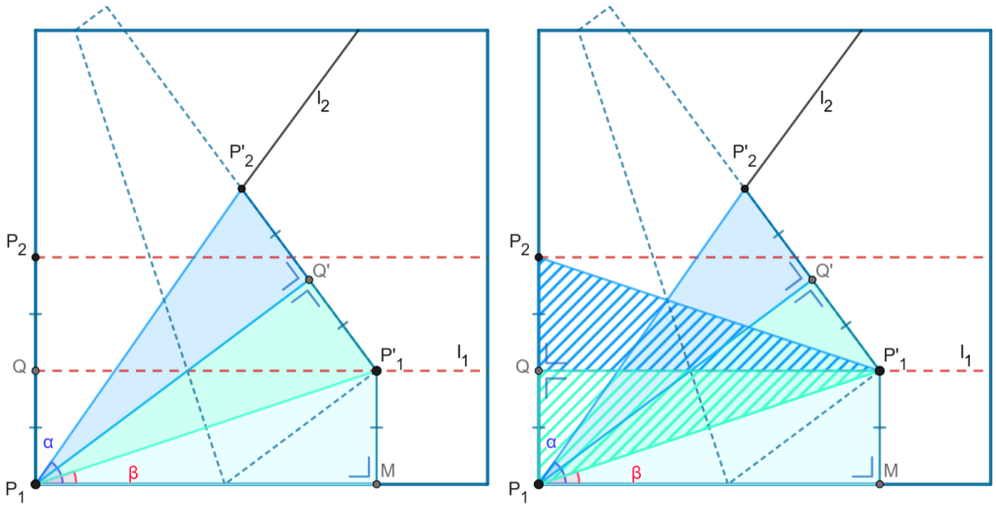
Tip 2

Bepaal de beeldpunten P_2' en Q' van P_2 en Q. Verbind deze met het hoekpunt P_1. Laat de loodlijn uit P_1' neer op de onderste rand van het blad papier, noem het voetpunt M en ga op zoek naar congruente driehoeken.



Tip 3

Om de congruentie van de driehoeken aan te tonen, kun je de oorspronkelijke driehoeken zoeken waarvan deze driehoeken het beeld zijn door de spiegeling om de vouwlijn.



✔ *Laat de loodlijn neer uit P_1' op de onderste zijde P_1M van het vierkant en noem het voetpunt M. Het is niet moeilijk om in te zien dat de driehoeken $\Delta P_1P_1'M$, $\Delta P_1'P_1Q$ en $\Delta P_1'P_2Q$ congruent zijn. Aangezien $s\left(\Delta P_1'P_1Q\right) = \Delta P_1P_1'Q'$ en $s\left(\Delta P_1'P_2Q\right) = \Delta P_1P_2'Q'$, met s de spiegeling om de laatste (blauwe) vouwlijn, volgt hier direct uit dat ook de driehoeken $\Delta P_1P_1'M$, $\Delta P_1P_1'Q'$ en $\Delta P_1P_2'Q'$ congruent zijn. Bijgevolg zijn de drie gevormde hoeken in P_1 even groot en dus alle drie gelijk aan één derde van de oorspronkelijke hoek.*

5 Verdubbeling van de kubus met origami

De leerstof die nodig is om de verdubbeling van de kubus te begrijpen, situeert zich in de tweede graad, maar is behoorlijk pittig. Daarom hebben we tussenstappen als controle ingevoegd. Afhankelijk van je klas en leerlingen, kan je daar uiteraard in schrappen. We zien het als een opdracht voor leerlingen die meer aankunnen. Naast gelijkvormigheid en de stellingen van Pythagoras en Thales is er ook een portie algebraïsche vaardigheid voor nodig. Het eerste stukje, het laten vaststellen dat de verdubbeling van de kubus neerkomt op het bepalen van $\sqrt[3]{2}$, kun je klassikaal aanpakken. Je kunt het kaderen in de anekdote rond het orakel van Delos (zie werktekst). Wanneer je deze activiteit los van andere activiteiten in deze loep doet, is het best om eerst de verschillende vouwen te herhalen aan de hand van het overzicht en te bespreken hoe je een evenwijdige aan een gegeven rechte kunt plooien (zie hoger).

LESACTIVITEIT

Verdubbeling van de kubus met origami

In 430 v.C. werd Athene getroffen door een plaag. Op het eiland Delos stond een kubusvormig altaar dat gebruikt werd als heiligdom voor het uitspreken van orakels. Toen de inwoners van Athene aan het orakel van Delos vroegen hoe ze van de plaag verlost konden worden, kregen ze als antwoord dat ze een dubbel zo groot altaar moesten bouwen. Dat plaatste de ambachtslui voor een probleem: gegeven een kubus, hoe kun je een kubus maken waarvan het volume twee keer zo groot is? De

ribbe verdubbelen, bleek niet het goede antwoord. De plaag werd er enkel erger door …

1 Wat gebeurt er met het volume van een kubus als je de ribbe verdubbelt?

✔ *Dan wordt het volume 8 keer zo groot.*

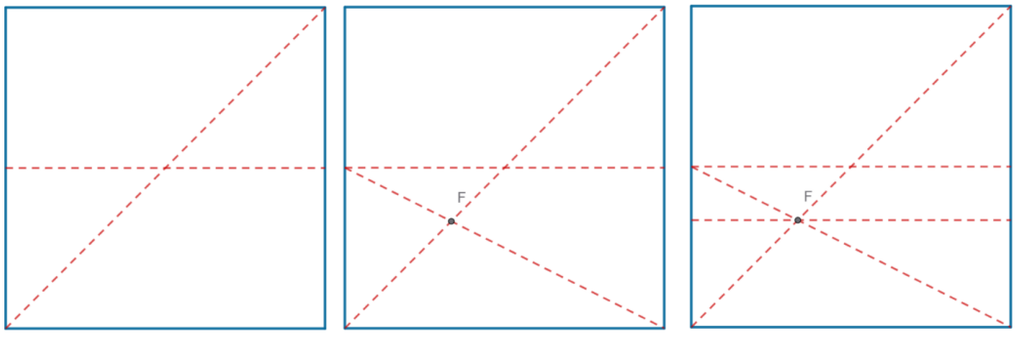
2 Hoe groot moet de ribbe van de kubus met een twee keer zo groot volume als de oorspronkelijke kubus zijn?

✔ *Neem een kubus met ribbe r, dan is het volume V gelijk aan r^3. Noem de ribbe van de nieuwe kubus x, dan moet het volume gelijk zijn aan $2V$, dus $x^3 = 2r^3$ of $x = \sqrt[3]{2}\,r$.*

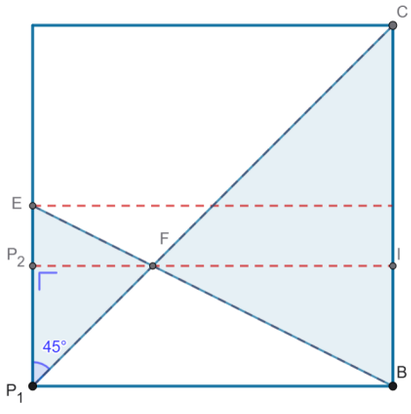
Het verdubbelen van het volume van de kubus komt neer op het afmeten van $\sqrt[3]{2}$ keer de ribbe van de oorspronkelijke kubus. In de 19de eeuw werd aangetoond dat dit niet via een constructie met passer en liniaal kan. We zoeken een antwoord op deze vraag via origami.

De eerste stap bestaat erin de breuk $\frac{1}{3}$ te plooien. Neem een vierkant blaadje papier en volg de stappen:

- Plooi de onderste rand van het blad papier op de bovenste (V3).
- Plooi het hoekpunt rechts beneden op het hoekpunt links boven (V2).
- Vouw de rechte door het midden van de linkerrand en het hoekpunt rechts beneden (V1).
- Bepaal het snijpunt F van deze laatste twee plooien.
- Plooi de loodlijn door F op de linkerrand (V4). Deze laatste verdeelt de linkerrand op $\frac{1}{3}$ van de zijde.



3 Ga na dat dit correct is. Tip: gebruik gelijkvormige driehoeken. Bekijk de figuur hierna.

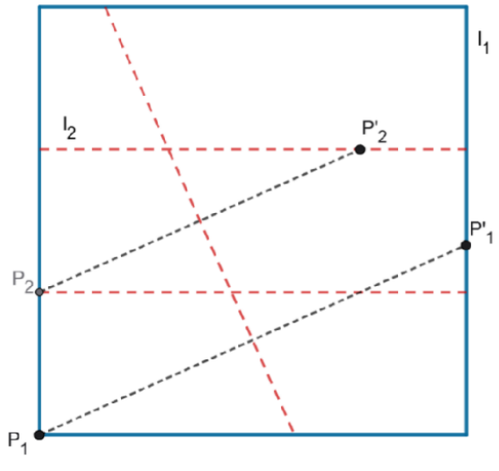


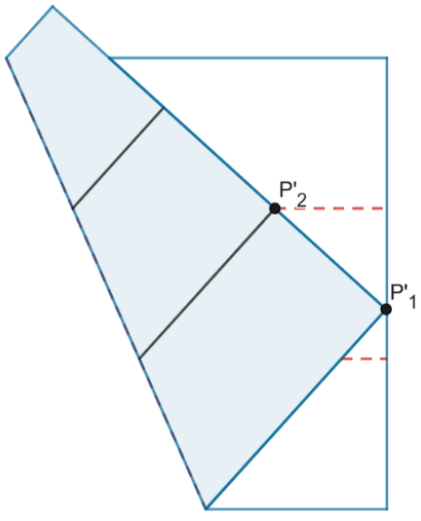
✔ *$\Delta EFP_1 \sim \Delta BFC$ door HH. De gelijkvormigheidsfactor is 2 want $|BC| = 2 \cdot |EP_1|$. Dat betekent dat de hoogte $|P_2F|$ van de ene driehoek de helft is van de hoogte $|FI|$ van de andere driehoek en dus $\frac{1}{3}$ van de zijde van het vierkant. Omdat ΔP_2FP_1 gelijkbenig is, is dan ook $|P_1P_2|$ gelijk aan $\frac{1}{3}$ van de zijde van het vierkant.*

Eenmaal we de vouw P_2I gevonden hebben, kunnen we ook de vouw l_2 op hoogte $\frac{2}{3}$ bepalen door de bovenste rand op deze vouw P_2I te plooien (V3).



We gebruiken nu de Belochvouw (V6) om het hoekpunt P_1 links beneden op de rechterrand l_1 te vouwen en tegelijk het punt P_2, het punt van de linkerrand op hoogte $\frac{1}{3}$, op de rechte l_2, de horizontale rechte op hoogte $\frac{2}{3}$, te vouwen. Dan is de verhouding tussen de twee lengtes waarin P_1' de rechterzijde verdeelt gelijk aan $\sqrt[3]{2}$.





4 Verklaar dit door het stappenplan te volgen.

a Noem $|BP_1'| = 1$, $|CP_1'| = x$ en $|BG| = y$. Schrijf $|BC|$ in functie van x.

b Gebruik dat K het snijpunt is van de vouw op hoogte $\frac{2}{3}$ met de rechterrand om $|CK|$ en daarna ook $|KP_1'|$ uit te drukken in functie van x.

c $|P_1'P_2'| = |P_1P_2|$ omdat plooien de afstand bewaart. Schrijf $|P_1'P_2'|$ in functie van x.

d Druk $|GP_1'|$ uit in functie van x en y. Bedenk dat je van een vierkant vertrokken bent waarvan je de zijde hebt geschreven in termen van x.

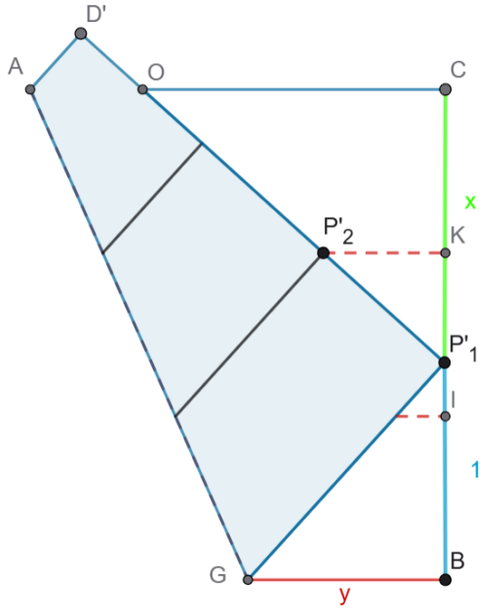
e Pas de stelling van Pythagoras toe in $\Delta GP_1'B$ om een eerste vergelijking in x en y te vinden.

f Los deze vergelijking op naar y. Je zou moeten vinden dat $y = \frac{x^2+2x}{2(x+1)}$.

g Leg uit waarom $\Delta P_1'P_2'K \sim \Delta GP_1'B$. Gebruik dit om een tweede vergelijking in x en y op te stellen.

h Los ook deze tweede vergelijking op naar y. Laat zien dat je $y = \frac{(2x-1)(x+1)}{3x}$ verkrijgt.

i Stel de twee gevonden uitdrukkingen voor y aan elkaar gelijk. Los deze laatste vergelijking op naar x.



✔ *Voor de verklaring hiervan maken we gebruik van gelijkvormigheid en de stelling van Pythagoras. Uit* $|BP_1'| = 1$, $|CP_1'| = x$ *en* $|BG| = y$, *volgt dat de zijde* $|BC|$ *van het vierkant gelijk is aan* $x + 1$ *en* $|CK| = |P_1'P_2'| = \frac{x+1}{3}$. *Omdat* $|CK| = \frac{x+1}{3}$, *zal* $|P_1'K| = \frac{2x-1}{3}$.

Verder is $|P_1'G| = x+1-y$. *Toepassen van de stelling van Pythagoras in* $\Delta GP_1'B$ *geeft:* $(x+1-y)^2 =$

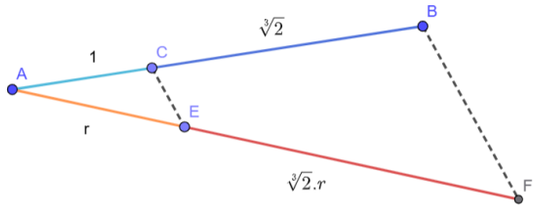
$1 + y^2$. *Oplossen naar* y *levert:* $y = \frac{x^2+2x}{2(x+1)}$.

Nu geldt dat $\Delta P_1'P_2'K \sim \Delta GP_1'B$ *door HH zodat* $\frac{|P_1'K|}{|P_1'P_2'|} = \frac{|GB|}{|P_1'G|}$ *of* $\frac{\frac{2x-1}{3}}{\frac{x+1}{3}} = \frac{y}{x+1-y}$.

Ook deze vergelijking lossen we op naar y. *We vinden:* $y = \frac{(2x-1)(x+1)}{3x}$.

We stellen beide uitdrukkingen voor y *gelijk aan elkaar en lossen op naar* x: $x = \sqrt[3]{2}$.

We hebben dus de zijde van het vierkant blaadje papier in twee delen verdeeld waarbij de lengte van het ene gelijk is aan $\sqrt[3]{2}$ als we de lengte van het andere deel als maateenheid nemen. Als we nu vertrekken van een kubus met ribbe r, dan kunnen we via de stelling van Thales, deze lengte r ook vermenigvuldigen met $\sqrt[3]{2}$.

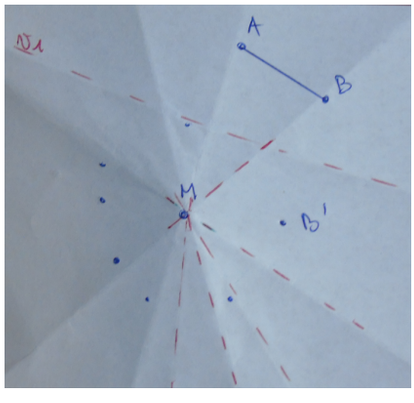


Merk op dat je hierbij een evenwijdige moet plooien. Dit kan door twee keer V4 te gebruiken. Deze methode voor het verdubbelen van de kubus werd ontdekt door Peter Messer in 1986.

6 Is origamimeetkunde rijker dan euclidische meetkunde?

6.1 Een cirkel 'plooien'

We hebben hierboven vastgesteld dat er constructies zijn die met passer en liniaal *niet* mogelijk zijn, maar *wel* met origami. Dit leidt tot de vraag of origamimeetkunde rijker is dan de meetkunde van constructies met passer en liniaal. Dat is niet per se het geval: om deze vraag te beantwoorden moeten we ook nagaan of, omgekeerd, alle constructies met passer en liniaal mogelijk zijn binnen de origamimeetkunde (zie bv. (Lombaers, 2011)). Dit zouden we niet volledig in de klas uitwerken, maar voor leerlingen kan het wel verbazingwekkend zijn dat je bv. een cirkel kunt plooien. In dit stukje laten we zien hoe je dat doet. Tip: als je het echt laat uitvoeren, duid dan het middelpunt aan beide kanten van het papier aan en bepaal het plooibeeld van een punt door het papier te doorprikken.



LESACTIVITEIT

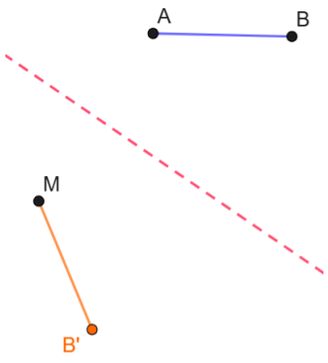
Een 'cirkel' plooien met origami

De twee basisfiguren in de euclidische meetkunde zijn punten en rechten. Rechten kun je plooien, maar wist je dat je ook een cirkel kunt plooien? Niet als één vloeiende lijn, maar, als middelpunt en straal van een cirkel gegeven zijn, kun je via plooien zoveel punten als je wil op de cirkel bepalen.

We veronderstellen dat het middelpunt M en de straal r gegeven zijn (r bv. via de afstand tussen twee punten A en B, $r = |AB|$). We gebruiken V2 om punt A op punt M te vouwen. Punt B komt dan op een punt B' terecht.

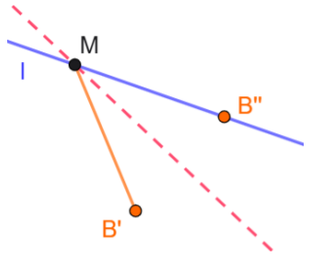
1 Verklaar waarom B' op de cirkel $c(M,r)$ ligt.

✔ *Plooien komt eigenlijk overeen met spiegelen. Omdat een spiegeling de lengte van een lijnstuk bewaart, zal dan ook $|MB'| = r$, dus is punt B' een punt van de cirkel $c(M,r)$.*



2 Neem een willekeurige middellijn l van de cirkel. Kun je een manier bedenken om een punt van de cirkel op deze middellijn te plooien?

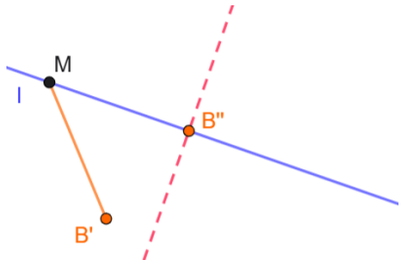
✔ *Vouw de rechte MB' op middellijn l en neem het beeldpunt B'' van B' (via V3 of V5). Merk op dat dit ook betekent dat we een gegeven lengte kunnen overbrengen naar een ander punt en op een andere rechte.*



Door dit proces te herhalen voor verschillende middellijnen kun je dus verschillende punten op de cirkel bepalen via plooien.

3 Hoe kun je de raaklijn in punt B'' aan de cirkel plooien?

✔ *De raaklijn aan de cirkel in B'' kun je vouwen door de loodlijn in B'' op de middellijn $B''M$ te vouwen (gebruik eerst V1 om de middellijn te vouwen als deze nog niet gegeven was en nadien V4).*



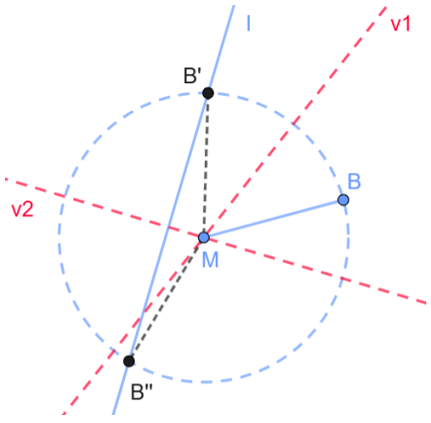
Voor wie graag de rest van het verhaal kent, schetsen we kort de grote lijnen. Sla dit stukje gerust over en ga direct naar de volgende paragraaf.

We kunnen reeds rechten en punten van een cirkel plooien. Met constructies met passer en liniaal bepalen we het snijpunt van twee rechten, van een rechte en een cirkel of van twee cirkels. Dat we de doorsnede van twee rechten kunnen plooien, is evident. In wat volgt, leggen we uit hoe je de doorsnede van een cirkel en een rechte en van twee cirkels kunt bepalen.

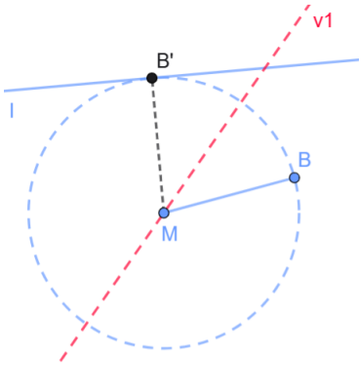


6.2 De doorsnede van een rechte en een cirkel bepalen via plooien

Veronderstel dat de cirkel $c(M,|MB|)$ gegeven is (via zijn middelpunt M en straal $|MB|$) en een rechte l zo dat $d(M,l) \leq |MB|$. Om de doorsnede van deze twee te bepalen, kunnen we de redenering die we gebruikt hebben bij het zoeken van de constructie voor V5 andersom toepassen. We plooien B op l met een plooilijn die door M gaat via V5 (zie onderstaande figuur). Het beeldpunt B' van B is dan een eerste snijpunt. Het tweede vinden we door het beeldpunt van B' te nemen via de vouw die door M gaat en loodrecht op l staat (V4). Op de figuur hebben we de cirkel in (blauwe) stippellijn getekend omdat we alleen de punten M en B kennen, niet de hele cirkel. De nummers bij de vouwlijnen verwijzen naar de volgorde waarin ze geplooid werden en niet naar de axioma's.



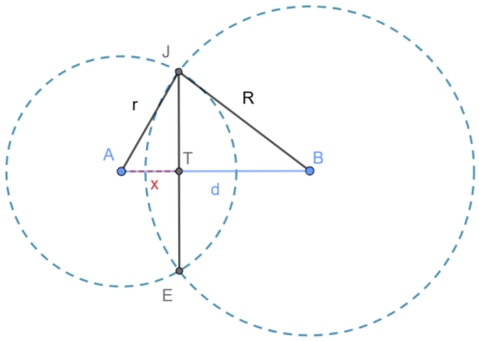
Als de rechte l aan de cirkel raakt, dan wordt punt B rechtstreeks op het raakpunt geplooid via V5.



6.3 De doorsnede van twee cirkels bepalen via plooien

Ten slotte zoeken we de gemeenschappelijke punten van twee snijdende of twee rakende cirkels. In het geval van twee snijdende cirkels bepalen we hiervoor eerst de rechte die door de twee snijpunten gaat. Daarna kunnen we dit geval herleiden tot het geval uit de het vorige paragraaf.

Gegeven zijn de middelpunten en stralen van twee cirkels $c(A,r)$ en $c(B,R)$. Noem $d = |AB|$, de afstand tussen de twee middelpunten. We zullen de cirkels opnieuw met een stippellijn op de tekening aanduiden, ook al zijn ze er eigenlijk niet.



Als we de rechte EJ kunnen bepalen, kunnen we de doorsnede van de cirkels met deze rechte bepalen en vinden we de snijpunten. Om de rechte EJ te bepalen, hebben we het punt T nodig. Dan kunnen we immers de loodlijn in T op AB plooien (V4). We zoeken daarom $|AT| = x$.

De lengtes $|AJ| = r$, $|BJ| = R$, $|AB| = d$ zijn gekend. We zoeken $|AT| = x$.

Uit de stelling van Pythagoras halen we dat:

$$|JT|^2 = r^2 - x^2 = R^2 - (d-x)^2.$$

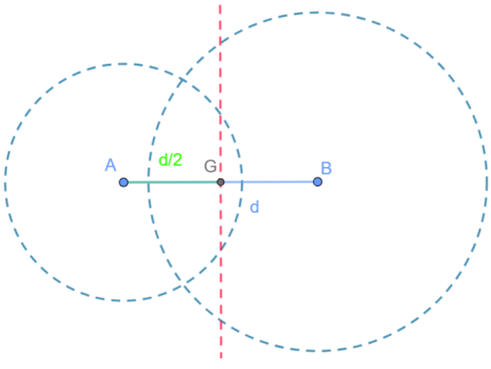
Oplossen naar x levert:

$$x = \frac{d^2 + r^2 - R^2}{2d} = \frac{d}{2} + \frac{r^2}{2d} - \frac{R^2}{2d}.$$

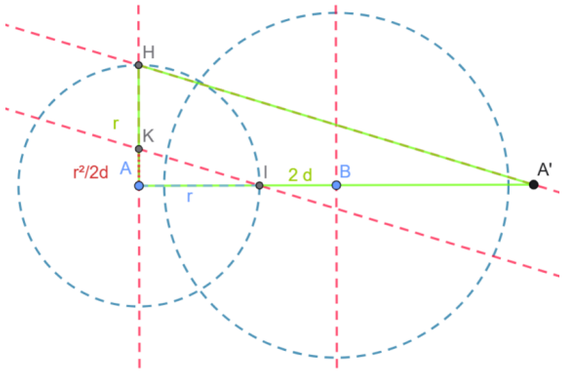
Deze lengte plooien wordt dus de volgende uitdaging. Als we elk van de termen apart kunnen plooien, kunnen we ook de som en het verschil plooien. We kunnen immers, zoals eerder opgemerkt, een lengte overbrengen naar een willekeurig punt op een willekeurige rechte.

We bekijken achtereenvolgens hoe we elke term plooien.

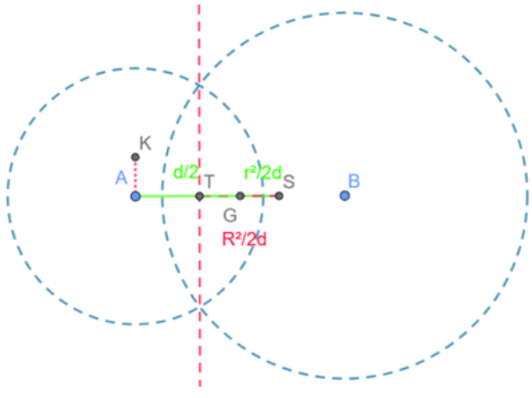
De eerste term $\frac{d}{2}$ kunnen we eenvoudig vinden door A op B te vouwen (V2). Dan is $|AG| = \frac{d}{2}$.



Om de tweede term $\frac{r^2}{2d}$ te plooien gebruiken we gelijkvormige en rechthoekige driehoeken (die je kunt plooien via V4 voor de rechte hoek en via twee keer V4 voor de evenwijdige). We zoeken $y = \frac{r^2}{2d}$. Deze vergelijking kunnen we herschrijven als $\frac{y}{r} = \frac{r}{2d}$. We maken daarom een rechthoekige driehoek HAA' met rechthoekszijden r en $2d$ en we zoeken een gelijkvormige rechthoekige driehoek waarbij r de overeenkomstige rechthoekszijde is van de zijde $2d$. Dat is driehoek KAI. De andere rechthoekszijde is dan de gezochte y. We plooien hiervoor een evenwijdige aan HA' door I.



Om $\frac{R^2}{2d}$ te plooien werken we op een gelijkaardige manier. Daarna brengen we alle lengtes over op AB. We plooien eerst A op B om het midden G van $[AB]$ te bepalen (V2).



We nemen S op AB zo dat $|GS| = \frac{r^2}{2d}$ en T op AB zo dat $|ST| = \frac{R^2}{2d}$. Dan is $|AT| = x$. We vouwen de loodlijn in T op AB (V4) en bepalen de snijpunten J en E met de cirkel met middelpunt A.

Daarmee hebben we dus uitgelegd dat alle constructies met passer en liniaal ook mogelijk zijn binnen origami. Origamimeetkunde kan echter meer dan de euclidische meetkunde. Dat tonen we aan in paragraaf 7.

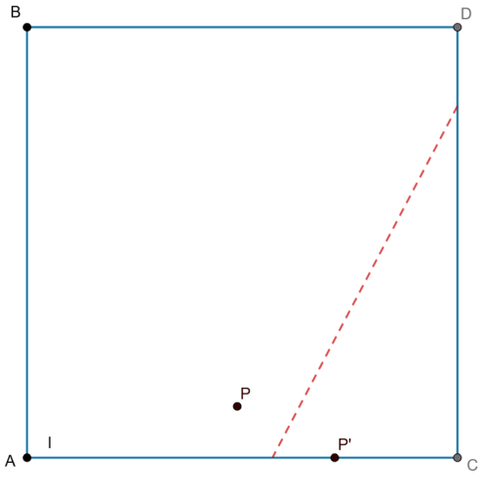
7 De Belochvouw nader bekeken

In deze paragraaf werken we een stukje uit waar via plooien een parabool tevoorschijn komt. Deze activiteit sluit aan bij de lessen rond tweedegraadsfuncties in de tweede graad. Zo krijgt het begrip parabool uit de studie van functies ook een meetkundige betekenis. Leerlingen bij wie een flink stuk analytische meetkunde op het programma staat, kun je de vergelijking van de parabool laten opstellen. Dat laatste zouden we klassikaal aanpakken.

LESACTIVITEIT

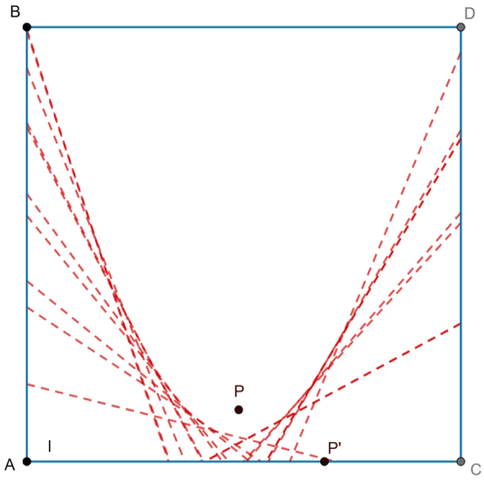
Een parabool vouwen

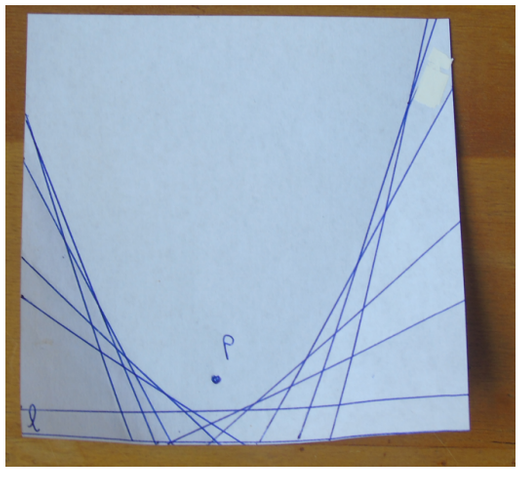
Neem een vierkant blaadje papier en plaats een punt P even boven de onderste rand en ongeveer in het midden tussen de linker- en de rechterrand. Markeer de onderste rand van het blaadje. Noem deze rechte l. Plooi nu telkens zo dat P op een punt (in het voorbeeld P') van de rechte l terecht komt. Doe dat minstens 10 keer.



1 Welke figuur wordt afgebakend door de plooilijnen? Tips: bij het plooien is het eenvoudiger om de onderste rand zo te plooien dat ze door het punt P gaat. Wrijf telkens direct na het plooien de plooilijn stevig aan.

✔ *Er lijkt een parabool te ontstaan. De plooilijnen zijn raaklijnen aan de parabool.*





2 Volgens welke merkwaardige rechte heb je telkens geplooid?

✔ *De plooilijn is de middelloodlijn van het lijnstuk* $[PP']$.

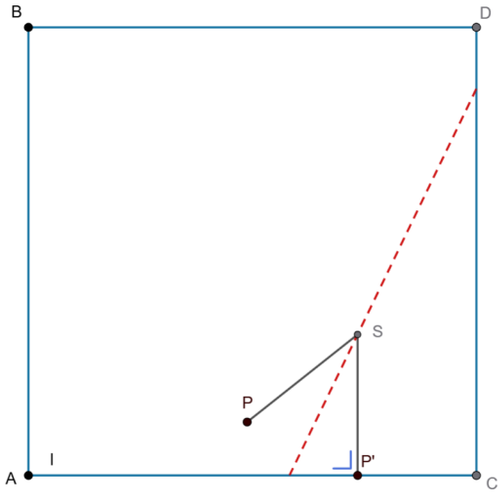
Maak de constructie na in GeoGebra. Voer volgende stappen uit.

- Teken een punt P en een rechte l.
- Plaats een punt P' op de rechte l via de knop 'punt op object'.
- Teken de middelloodlijn van het lijnstuk $[PP']$ via de knop 'middelloodlijn'.
- Klik rechts op de rechte en kies voor 'spoor aan'.
- Versleep punt P'. Je ziet de parabool tevoorschijn komen.

Om de parabool te tekenen, ga je als volgt tewerk. (Tip: ga eerst naar de sleepfunctie, klik op een vrije plaats in het scherm en sleep even naar links en rechts zodat het spoor verdwijnt. Zet eventueel ook het spoor uit.)

- Teken voor elk van de punten P' op de rechte l de loodlijn in P' op l via de knop 'loodlijn'.
- Bepaal telkens het snijpunt S met de bijhorende plooilijn via de knop 'snijpunten van twee objecten'. Deze punten S liggen op de parabool.
- Vraag de meetkundige plaats van de punten S via de knop 'meetkundige plaats'. Deze vind je onder het vierde menu 'lijnen'. Duid punt S en punt P' aan.
- Eventueel kun je nu even terug punt P' verslepen en het spoor van de middelloodlijn aanzetten om te controleren of het over dezelfde parabool gaat.

3 Verklaar waarom de punten S telkens even ver liggen van de rechte l als van punt P.



✔ *De afstand van punt S tot de rechte l is gelijk aan* $|SP'|$*; aangezien S op de middelloodlijn van* $[PP']$ *ligt, zal* $|PS| = |P'S|$.

Een parabool blijkt dus de verzameling van alle punten te zijn waarvoor de afstand tot een gegeven punt, P in dit geval, gelijk is aan de afstand tot een gegeven rechte, hier de rechte l. Het punt P wordt het brandpunt genoemd en de rechte l de richtlijn. De plooilijnen die je gebruikte om de parabool te vouwen, hebben telkens juist één punt gemeen met de parabool (we gaan hier niet in op het bewijs hiervan). Het zijn raaklijnen aan de parabool.

Een verzameling punten van het vlak die aan een meetkundige voorwaarde voldoen, noemen we een meetkundige plaats. Een ander voorbeeld van een meetkundige plaats is een cirkel. De cirkel met middelpunt M en straal r is bijvoorbeeld de meetkundige plaats van alle punten die op afstand r van het punt M liggen.

4 Ken je nog andere meetkundige plaatsen?

✔ *De middelloodlijn van een lijnstuk als de verzameling van alle punten die even ver liggen van de grenspunten van het lijnstuk of de bissectrices van twee snijdende rechten als de verzameling van alle punten die even ver liggen van de gegeven rechten.*

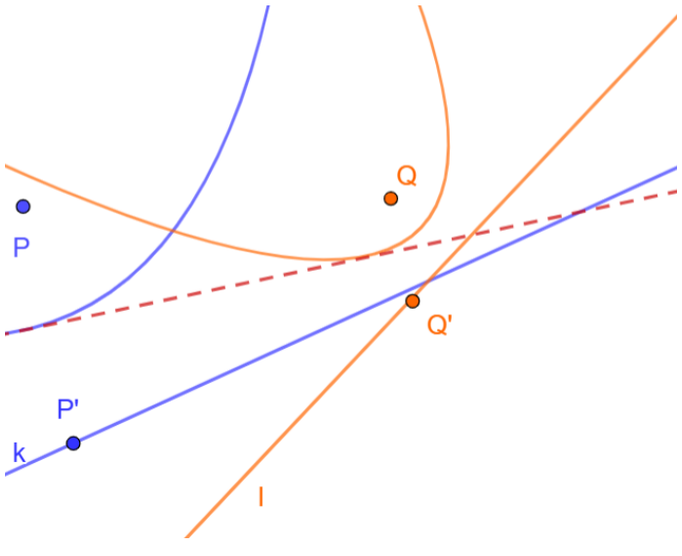
Om de vergelijking van de parabool op te stellen, lijkt het logisch om het assenstelsel zo te kiezen dat de rechte l de x-as is en het punt P als coördinaat $(0,1)$ heeft. Eenvoudiger is echter om de x-as parallel met de onderste rand en half zo ver ervan als punt P te kiezen zodat de rechte l als vergelijking $y = -1$ krijgt. Een willekeurig punt $S(x,y)$ behoort tot de parabool als en slechts als $|PS| = d(l,S)$. Aangezien afstanden positief zijn, kunnen we kwadrateren. Verder is $d(l,S) = |SP'| = |y+1|$ zodat de voorwaarde wordt $x^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2$. Uitwerken en vereenvoudigen, geeft $x^2 - 2y = 2y$ of $y = \frac{1}{4}x^2$.

Bij het tweede werkblad zoomen we verder in op de Belochvouw. We laten zien hoe je de vouw kunt vinden voor verschillende liggingen van de twee punten en de twee rechten. Uit de eerdere oefeningen in paragraaf 3 blijkt dat dat niet zo eenvoudig is. Het is ook de manier waarop we zelf de oplossingen bij het werkblad gemaakt hebben. Het werkblad sluit aan op het voorgaande in die zin dat leerlingen moeten weten dat een plooilijn die een punt op een rechte plooit, een raaklijn is aan een parabool. We gaan ervan uit dat de leerlingen al met GeoGebra gewerkt hebben en de basisinstructies kunnen uitvoeren.

LESACTIVITEIT

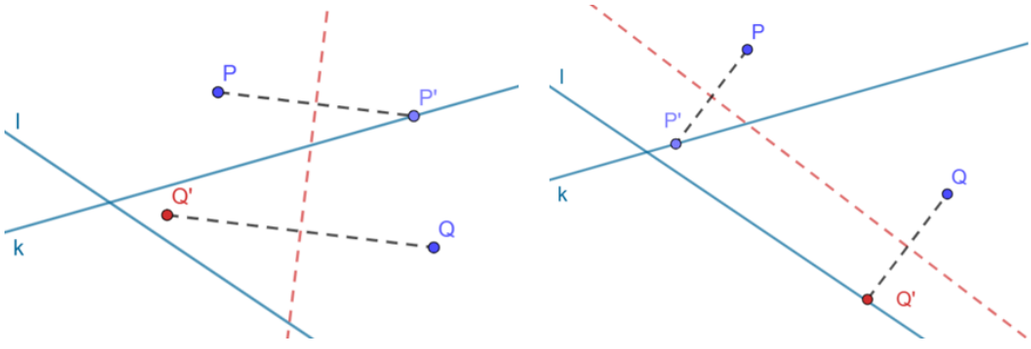
De Belochvouw nabootsen met GeoGebra

Bij de Belochvouw vouwen we tegelijk punt P op de rechte k en punt Q op de rechte l. De plooilijn moet bijgevolg tegelijk raaklijn zijn aan de parabool met brandpunt P en richtlijn k en aan de parabool met brandpunt Q en richtlijn l. Ze bestaat als beide parabolen een gemeenschappelijke raaklijn hebben.

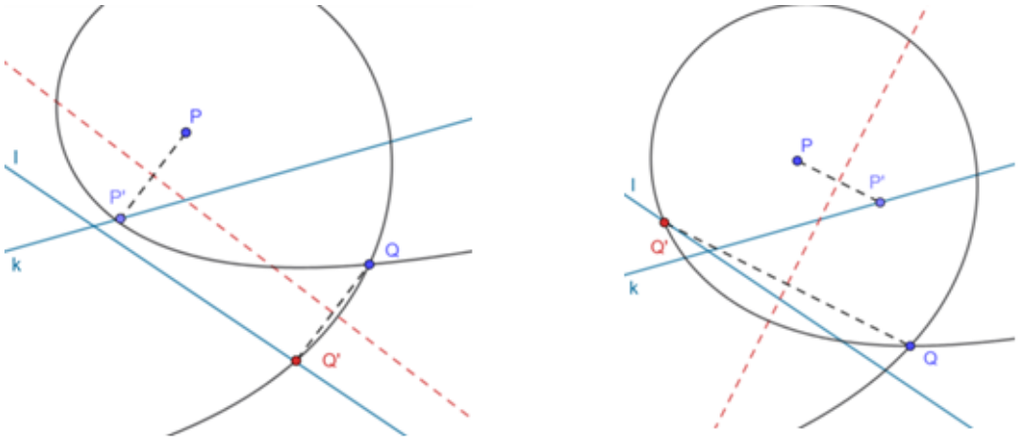


Je kunt via GeoGebra de Belochvouw niet rechtstreeks tekenen aangezien de vouw niet construeerbaar is met passer en liniaal. Je kunt wel via uitproberen nagaan waar de vouw ongeveer ligt. Ga als volgt tewerk:

- Plaats twee verschillende punten P en Q en twee verschillende rechten k en l op het scherm.
- Plaats een willekeurig punt P' op de rechte k via de knop 'punt op object'.
- Construeer de middelloodlijn van $[PP']$ (de knop 'middelloodlijn').
- Spiegel punt Q t.o.v. deze middelloodlijn en noem het beeldpunt Q' via de knop 'lijnspiegeling' uit het negende menu.
- Verplaats punt P' via de sleepfunctie op de rechte k tot punt Q' op de rechte l terecht komt.



Om te zien waar de oplossing ongeveer ligt en of er meerdere mogelijke oplossingen zijn, kun je de meetkundige plaats bepalen van de punten Q' wanneer punt P' op de rechte k beweegt (knop 'meetkundige plaats' onder het vierde menu). In het voorgaande geval zien we dat er één mogelijke oplossing is (figuur links hieronder). Maar bij sommige liggingen zijn er drie oplossingen mogelijk (figuur rechts hieronder, met slechts één oplossing aangeduid).



Hiermee sluiten we deze loep af. Er valt nog veel meer te vertellen over origamimeetkunde, bv. hoe je getallen kunt plooien of hoe je figuren kunt plooien en uitknippen met één knip. Misschien een onderwerp voor een volgend artikel?

BRONNEN

Alperin, R. C. (2009). One-, Two-, and Multi-Fold Origami Axioms. *Origami 4*, pp. 371-393. https://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/o4_multifold_axioms.pdf

Hofstede, H. (2026). *Bewijzen.* https://www.hhofstede.nl/bewijzen/bewijzen.htm

Lang, R. (2008). *From Flapping Birds to Space Telescopes: The Modern Science of Origami.* Boston, Massachusetts: USENIX annual technical conference. https://www.usenix.org/conference/2008-usenix-annual-technical-conference/flapping-birds-space-telescopes-modern-science

Lang, R. (2015). *Origami and Geometric Constructions.* https://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/origami_constructions.pdf

Lombaers, P. T.-W. (2011, 26 mei). *Origami meetkunde.* https://webspace.science.uu.nl/~ooste110/meetkunde/peterjanwillem.pdf

Robinson, N. (2026, 20 mei). *History of origami.* https://www.britannica.com/art/origami/History-of-origami

Roelens, M. (2023, 19 mei). Contrast. *Uitwiskeling 39/2*.

van Wijk, J. B. (2024). *Origami en wiskunde.* Amsterdam: Zebrareeks 71, Epsilon Uitgaven.

Van Wijk, J. B. (2025). Mathematics teachers' professional experimentation with mathematical origami in secondary education. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*. https://doi.org/10.29333/ejmste/15911