Verloop van functies grafisch bekeken

Johan Deprez

INHOUD

1 Toenemende, constante en afnemende stijging en daling 28
1.1 De start: stijgende eerstegraads- en exponentiële functies 28
1.2 Dalende eerstegraads- en exponentiële functies 30
1.3 Afnemende stijging en toenemende daling 32
1.4 De overgang naar andere functies 33
1.5 Samengevat 34
1.6 Van absolute waarde naar de afgeleide zelf 35
1.7 Tweede afgeleide 35
1.8 Overzichtstabel 35
1.9 Betekenis van de tweede afgeleide 37
2 Het verband tussen een functie en haar afgeleide 38
2.1 De leerlijn 38
2.2 Grafiek van een functie en haar afgeleide 39
2.3 Vijf grafieken en één tekentabel 41
2.4 Een contextoefening. 42
2.5 Derdegraadsfuncties 45

Inleiding

In deze loep focussen we op twee aspecten van het functieverloop:

- het constante, toenemende of afnemende karakter van een stijging of daling (zie paragraaf 1);
- het verband tussen een functie en haar afgeleide (zie paragraaf 2).

Bij beide onderwerpen ligt de focus op de grafische aanpak. Die volstaat voor studierichtingen uit de derde graad waarvoor enkel de minimumdoelen uit de basisvorming van toepassing zijn. Na deze grafische start gaan we in op de algebraïsche aanpak. Die is van toepassing voor studierichtingen met minimumdoelen uitgebreide of gevorderde wiskunde, maar die krijgt in deze loep minder aandacht.

Concreet gaat het bij de grafische aanpak over

- het onderdeel *constante, toenemende of afnemende stijging of daling* uit de memorie van toelichting bij minimumdoel 06.02 uit de doorstroomfinaliteit: *De leerlingen brengen met behulp van de grafiek, kenmerken van een functie in verband met de betekenisvolle situatie die door de functie beschreven wordt*;
- het minimumdoel 06.04 uit de doorstroomfinaliteit en het specifieke minimumdoel 06.10.07 uit het pakket uitgebreide analyse en algebra voor bepaalde studierichtingen dubbele finaliteit: *De leerlingen leggen grafisch het verband tussen een functie en haar afgeleide functie*

Bij de algebraïsche aanpak gaat het over de volgende specifieke minimumdoelen uit de diverse

pakketten uitgebreide wiskunde en het pakket gevorderde wiskunde:

- specifieke minimumdoelen 06.04.06, 06.05.06, 06.06.03 en 06.08.07: *De leerlingen leggen het verband tussen de grafiek van een functie en haar kenmerken*;
- het eerste deel uit specifieke minimumdoelen 06.04.13, 06.05.13, 06.06.08 en 06.08.18: *De leerlingen analyseren het verloop van functies met behulp van de eerste en tweede afgeleide functie en lossen extremumproblemen op.*

1 Toenemende, constante en afnemende stijging en daling

De aandacht voor dit aspect van het verloop van functies is een nieuw element in de minimumdoelen die enkele jaren geleden van kracht geworden zijn. Het gaat over begrippen die in allerlei contexten een rol spelen. Denk bijvoorbeeld aan de toenemende stijging van het aantal besmettingen in het begin van de covid-pandemie of aan de wet van de afnemende meeropbrengsten uit de economie. Daarom is het waardevol dat een brede groep van leerlingen deze begrippen leert kennen.

In algebraïsche termen wordt het toenemende, constante of afnemende karakter van een stijging of daling bepaald door de tweede afgeleide. Je hoeft echter niet over dit wiskundig gereedschap te beschikken om er op een grafische manier mee om te gaan (zoals je ook niet vertrouwd hoeft te zijn met de afgeleide om te kunnen begrijpen wat stijgen en dalen zijn).

In deze paragraaf werken we onder de vorm van een reeks deelparagrafen een leerlijn uit voor deze begrippen.

1.1 De start: stijgende eerstegraads- en exponentiële functies

Leerlingen hebben eerstegraadsfuncties bestudeerd in het derde jaar. In de derde graad komen exponentiële functies aan bod. Bij het introduceren van exponentiële functies worden lineaire en exponentiële groei vaak tegenover elkaar afgezet: ‘elke tijdseenheid een vaste hoeveelheid erbij’ versus ‘elke tijdseenheid de hoeveelheid met een vaste factor vermenigvuldigen’. In dit voorbeeld laten we zien dat je dit later kunt uitdiepen wanneer afgeleiden aan bod gekomen zijn. Het onderscheid tussen beide groeiprocessen kun je immers ook formuleren in termen van groeisnelheid, en dus in termen van afgeleiden. Dit brengt ons op zijn beurt dan bij iets dat algemener van toepassing is dan enkel bij lineaire en exponentiële groei: we kunnen verschillende vormen van stijgen (en dalen) onderscheiden.

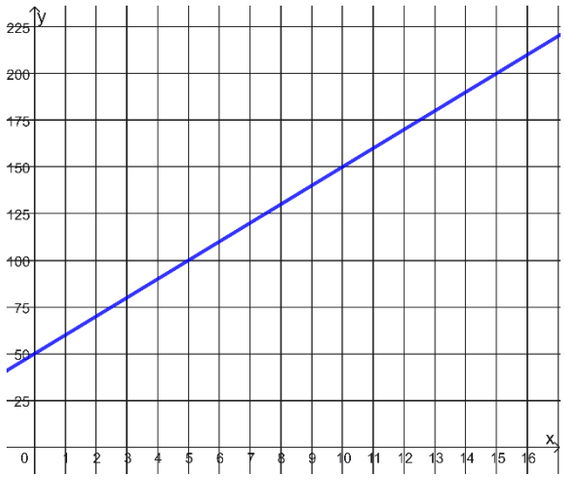
We starten (in deze paragraaf) met een klassikaal stukje, waarin het gaat over een stijgende eerstegraadsfunctie en een stijgende exponentiële functie en waarin we de leraar de begrippen ‘constante stijging’ en ‘toenemende stijging’ laten introduceren. Nadien volgt (in de volgende paragraaf) een lesactiviteit rond dalende eerstegraads- en exponentiële functies, waar ‘constante daling’ en ‘afnemende daling’ aan de orde zijn, en (in de daaropvolgende paragraaf) een lesactiviteit waarbij we leerlingen functies laten zoeken die een ‘afnemende stijging’ en ‘toenemende daling’ vertonen. Op die manier komen de zes verschillende vormen aan bod. We maken enkel gebruik van de grafische betekenis van de afgeleide. We beschrijven hieronder in detail wat bij deze start aan bod zou kunnen komen.

Hieronder zie je de grafiek van de eerstegraadsfunctie f met voorschrift $f(x) = 50 + 10x$ (Figuur 1) en die van de exponentiële functie g met voorschrift $g(x) = 50 \cdot 1{,}1^x$ (Figuur 2).

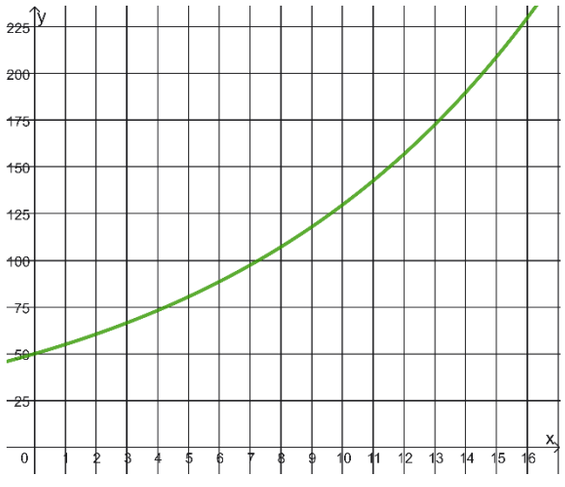
Deze functies zouden bijvoorbeeld twee verschillende manieren kunnen beschrijven waarop de waarde (in EUR) van een belegging van 50 EUR toeneemt in functie van de tijd $x \geq 0$ (in jaar), of waarop het gewicht (in kg) van twee pasgeboren veulens toeneemt, waarbij $x \geq 0$ dan de tijd in maanden is.

De functie f beschrijft lineaire groei en de functie g beschrijft exponentiële groei. Toen we exponentiële functies introduceerden hebben we het verschil tussen beide als volgt uitgedrukt:

- bij lineaire groei komt er elke tijdseenheid eenzelfde hoeveelheid bij (in de voorbeelden: het bedrag groeit elk jaar met 10 EUR aan, het veulen wordt elke maand 10 kg zwaarder);
- bij exponentiële groei wordt de hoeveelheid elke tijdseenheid met een vaste factor vermenigvuldigd, of equivalent: er komt elke tijdseenheid een vast percentage bij (in de voorbeelden is de factor 1,1, en er komt dus elk jaar of elke maand 10 procent bij).



Figuur 1 *– Grafiek van de eerstegraadsfunctie f*



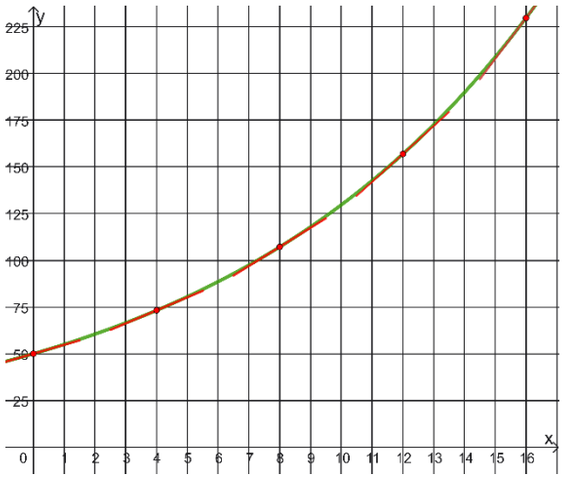
Figuur 2 *– Grafiek van de exponentiële functie g*

Nu gebruiken we *afgeleiden*, of in de context van groei: de *groeisnelheid*, om de twee functies en de twee groeiprocessen met elkaar te vergelijken.

Beide functies zijn stijgend:

als x toeneemt, dan nemen ook
$f(x)$ en $g(x)$ toe.

Er is echter een verschil tussen beide. In de klas kun je dit verschil dynamisch illustreren met een GeoGebrabestand. Je vindt er één op onze website. In deze loep moeten we ons beperken tot de statische Figuur 3, waarin we enkele raaklijnen getekend hebben aan de grafiek van de exponentiële functie g.



Figuur 3 *– Grafiek van de exponentiële functie met raaklijnen*

Deze raaklijnen tonen ons het volgende: als x groter wordt, worden de raaklijnen aan de grafiek van g steiler. Anders uitgedrukt:

als x toeneemt, neemt $g'(x)$ toe.

Of nog: als x toeneemt, neemt de groeisnelheid toe. Bij exponentiële groei verloopt de groei dus sneller en sneller. De exponentiële functie g is dus niet zomaar stijgend, maar vertoont een *toenemende stijging*:

als x groter wordt, dan neemt
$g(x)$ sneller en sneller toe.

Bij de functie f is er geen sprake van een toenemende stijging: alle raaklijnen zijn even steil, ze vallen immers samen met de grafiek van f. Met andere woorden:

als x toeneemt, blijft $f'(x)$ gelijk.

Bij lineaire groei is er een vaste groeisnelheid. We zeggen dat de eerstegraadsfunctie f een *constante stijging* vertoont.

We merken dus dat er verschillende vormen van stijgen bestaan. In een tabel met het functieverloop geven we dit weer door verschillende pijlen te gebruiken: we blijven ↗ gebruiken voor een constante stijging maar een toenemende stijging geven we weer met ⤴.

Dit is een goed moment voor een extraatje. In de omgangstaal wordt de uitdrukking ‘exponentiële groei’ dikwijls verkeerd gebruikt. Vaak wordt daar een heel sterke groei mee bedoeld. Dat klopt niet met de betekenis binnen de wiskunde. Exponentiële groei kan ook heel traag gaan. Denk bijvoorbeeld aan de groei van geld op een spaarrekening met een lage rentevoet. Om van exponentiële groei

te kunnen spreken, is het nodig dat de groei (in absolute termen) sneller en sneller verloopt: op zo'n spaarrekening met een lage rentevoet zal het aantal euro's dat er jaarlijks bijkomt in het begin heel klein zijn, maar het zal elk jaar wel groter en groter worden. Zoals je in Figuur 4 kunt zien, hinkt de omschrijving in de Dikke Van Dale op twee benen, waarbij zowel correcte elementen (bijvoorbeeld: vast groeipercentage, versnellend) als incorrecte (bijvoorbeeld: buitengewoon krachtige groei) gecombineerd worden.

- *exponentiële groei*

  a groei met een vast percentage per tijdseenheid, m.n. bijzonder sterke groei doordat in elk volgend stadium een verdubbeling, verdrievoudiging enz. optreedt

  b figuurlijk buitengewoon krachtige, steeds versnellende economische groei

Figuur 4 *– Lemma 'exponentiële groei' uit de Dikke Van Dale online, geraadpleegd op 29/3/26*

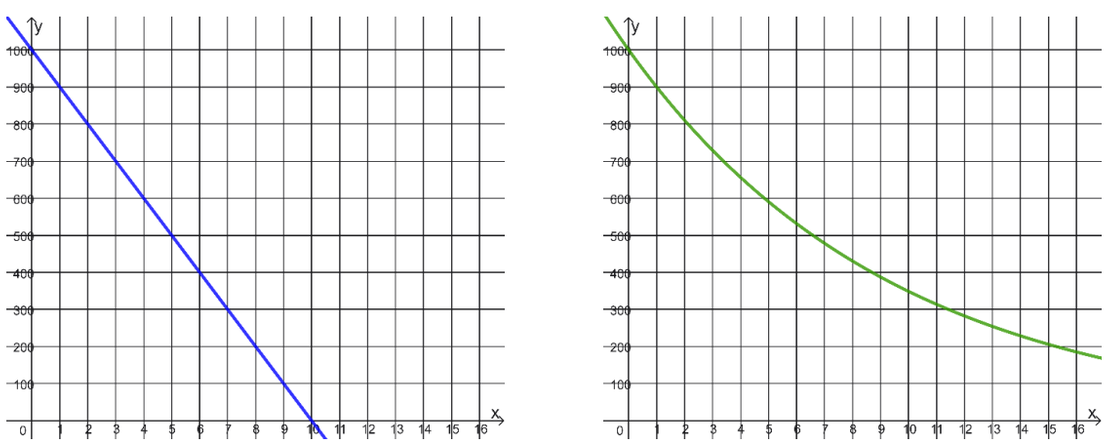
1.2 Dalende eerstegraads- en exponentiële functies

We zijn klaar met de eerste lessequentie, waarin we het verschil tussen constante en toenemende stijging klassikaal geïntroduceerd hebben. In de volgende stap maken leerlingen kennis met het verschil tussen een constante en een afnemende daling. We blijven werken met eerstegraadsfuncties en exponentiële functies, maar bekijken nu hun dalende variant. We hebben dit uitgewerkt onder de vorm van een lesactiviteit. Je kunt die als werktekst gebruiken voor een individuele of groepsopdracht, maar hij kan ook de basis zijn voor een onderwijsleergesprek.

LESACTIVITEIT

Dalende eerstegraads- en exponentiële functies

Eerstegraadsfuncties en exponentiële functies zijn niet altijd stijgend, ze kunnen ook dalend zijn. Dat is het geval voor de functies f en g, die gegeven worden door $f(x) = 1000-100x$ en $g(x) = 1000 \cdot 0{,}9^x$ en waarvan je de grafiek in de onderstaande figuur vindt.



In de context van 'groei' is er sprake van een 'negatieve groei' of afname, hier dus: lineaire of exponentiële afname. Een voorbeeld zou kunnen zijn: de afname van de hoeveelheid lucht (in gram) in een luchtballon in functie van de tijd (in dagen).

Net zoals bij de stijgende eerstegraads- en exponentiële functies kunnen we nu preciseren over *welke soort daling* het gaat bij deze twee functies.

1 Vul eerst onderstaande tabel in voor beide functies. (We vulden hier de antwoorden in grijs in.)

x	$f(x)$	**verschil**	$g(x)$	**verschil**
0	1000		1000	
		−100		−100
1	900		900	
		−100		−90
2	800		810	
		−100		−81
3	700		729	
		−100		−72,9
4	600		656,1	

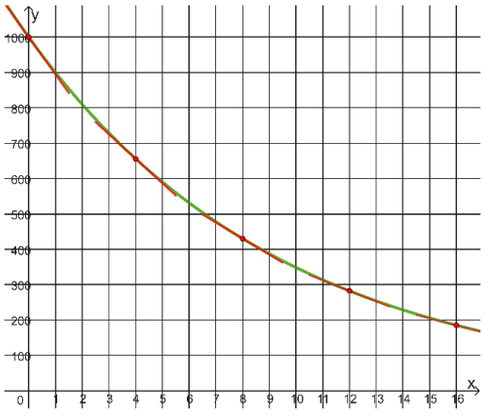
2 Hoe zou je het soort daling bij de lineaire afname (eerstegraadsfunctie) noemen? En bij de exponentiële afname (exponentiële functie)? Gebruik benamingen die in de lijn liggen van wat je net geleerd hebt over 'echte' groei (toename).

✔ *In het geval van de lineaire afname (eerstegraadsfunctie) is er sprake van een* constante daling*: elke tijdseenheid is er een daling met* 100 *gram. Bij de exponentiële afname is er een* afnemende daling*: eerst* 100 *gram, daarna* 90 *gram, … Let wel: het 'afnemen' slaat hier dus op de* absolute waarde *van het verschil.*

3 Teken in de figuur hierboven (bij benadering) de raaklijnen aan de grafiek van g in de punten met eerste coördinaat 0, 4, 8, 12 en 16. Gebruik dit om de volgende zin aan te vullen: als x toeneemt, dan worden de raaklijnen aan de grafiek van g …

✔ *De raaklijnen worden minder steil in de figuur (ook hier: we kijken dus naar de absolute waarde van de richtingscoëfficiënt).*

We hebben maar enkele (korte stukjes) raaklijnen getekend maar in gedachten moeten we ons voorstellen wat er met de raaklijn gebeurt wanneer we x 'continu' laten toenemen. Dat kun je bijvoorbeeld doen door de kromme van links naar rechts te doorlopen terwijl je een geodriehoek de positie van de raaklijnen laat volgen. Je zou het ook kunnen simuleren met een GeoGebra-figuur met een veranderende raaklijn met een schuifbalk voor de waarde van x.



4 Vul aan: als x toeneemt, dan neemt $|g'(x)|$ …

✔ *… af. Hoe steil de raaklijn is, wordt bepaald door de absolute waarde van de richtingscoëfficiënt van de raaklijn, en dus door de absolute waarde van de afgeleide. We verkiezen om hier nog niet in te gaan op het feit dat $g'(x)$ zelf (dus zonder de absolute waarde te nemen) 'minder en minder negatief' wordt en dus toeneemt. Dat wordt immers pas later van belang.*

1.3 Afnemende stijging en toenemende daling

Er ontbreken nu nog twee gevallen. Deze komen aan bod in de volgende lesactiviteit.

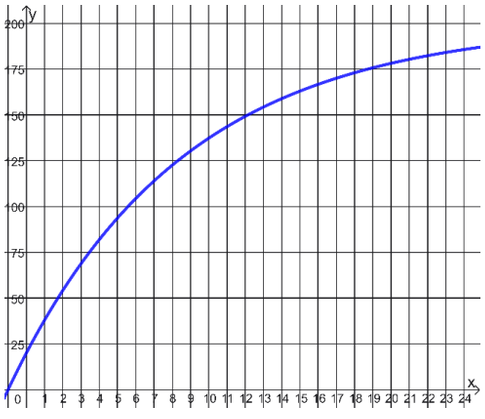
LESACTIVITEIT

Afnemende stijging en toenemende daling

1 Laat aan de hand van een schets zien hoe de grafiek van een functie er zou uitzien die een *afnemende stijging* vertoont. Geef een voorbeeld (voorschrift) van een functie f die zo'n afnemende stijging vertoont. Tip: vertrek van een exponentiële functie en pas een of meer transformaties toe.

✔ *Je kunt de grafiek van een dalende exponentiële functie spiegelen om de horizontale as.*

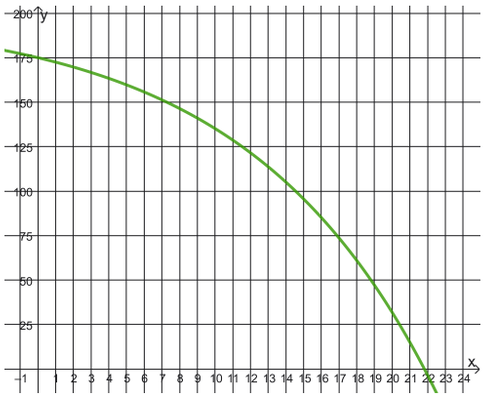
Als je bijvoorbeeld start met $f(x) = 0{,}9^x$, vind je dan: $g(x) = -0{,}9^x$. Wil je een voorbeeld met positieve functiewaarden (bijvoorbeeld omdat je er een context voor wilt geven), dan kun je na het spiegelen ook nog een verticale vermenigvuldiging en een verticale verschuiving toepassen. Je vindt dan bijvoorbeeld een functie als $h(x) = 200 - 180 \cdot 0{,}9^x$, zoals op de grafiek. Zinvolle contexten kunnen dan zijn: het opwarmen in de oven van 200° van een gerecht dat aanvankelijk op kamertemperatuur is (20°), of het opladen van een condensator.



2 Doe nu hetzelfde voor een *toenemende daling*: maak eerst een schets en geef vervolgens een voorbeeld van een functie g die zo'n toenemende daling vertoont.

✔ *Spiegel een stijgende exponentiële functie om de horizontale as en pas eventueel nadien nog een verticale verschuiving toe.*

Een voorbeeld is $g(x) = 200 - 25 \cdot 1{,}1^x$ op de grafiek. Deze functie zou bijvoorbeeld de evolutie kunnen beschrijven van de openstaande schuld bij het terugbetalen van een lening (met de nodige beperkingen op de toegelaten waarden van x). De toenemende daling laat zich hier als volgt interpreteren. In het begin is de uitstaande schuld groot. De maandelijkse afbetaling bestaat dan voor een groot deel uit intrest en slechts een klein deel wordt gebruikt om kapitaal af te lossen. Naarmate de uitstaande schuld daalt, kan een groter deel van de maandelijkse aflossing gebruikt worden om kapitaal af te lossen. Daardoor daalt de uitstaande schuld sneller en sneller. Zie de figuur hiernaast voor een grafiek.



1.4 De overgang naar andere functies

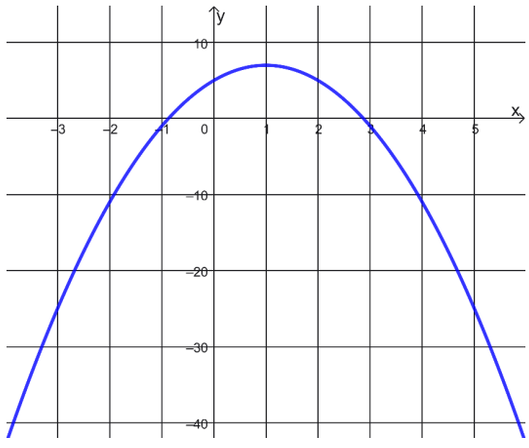
Tot nu toe hebben we enkel gebruik gemaakt van eerstegraadsfuncties en van exponentiële functies (eventueel getransformeerd). De volgende stap is de overgang naar andere functies. Tegelijk zetten we ook een andere belangrijke stap: veel functies vertonen niet over hun hele domein hetzelfde verloop. We werken deze stappen hier niet in detail uit, maar stippen een aantal aandachtspunten aan.

Bij de uitbreiding naar andere functies is het goed om eerstegraadsfuncties en exponentiële functies in perspectief te zetten. Constante stijging of daling komt *enkel* voor bij eerstegraadsfuncties. Het is dus een kenmerkende eigenschap van deze functies en we vinden het belangrijk dat leerlingen deze karakterisering van eerstegraadsfuncties leren kennen. Ze komt bijvoorbeeld van pas wanneer je willekeurige functies over een klein interval benadert door een eerstegraadsfunctie. In het kader van het functieverloop zal constante stijging of daling echter geen rol van betekenis meer spelen.

Bij toenemende en afnemende stijging en daling liggen de zaken helemaal anders. Bijvoorbeeld: stijgende exponentiële functies zijn zeker *niet* de enige functies die een toenemende stijging vertonen en we zullen verderop heel wat andere voorbeelden ontmoeten. Anders geformuleerd: dat er sprake is van een toenemende stijging, is niet voldoende om te spreken van exponentiële groei. Bij exponentiële groei treedt er een heel specifieke vorm van een toenemende stijging op, namelijk: de functie die weergeeft hoe sterk een exponentiële functie stijgt, d.w.z. de afgeleide functie, is zelf weer een exponentiële functie, bovendien met hetzelfde grondtal.

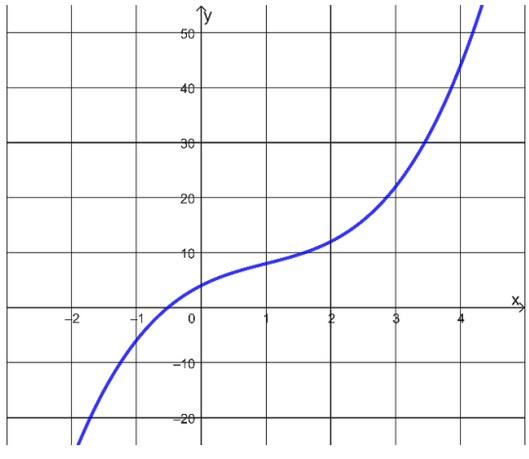
Een aantal interessante voorbeelden die in deze fase de revue kunnen passeren, zijn de volgende:

1. Tweedegraadsfuncties hebben de leerlingen al eerder bestudeerd. De tweedegraadsfunctie f met $f(x) = -2(x-1)^2 + 7 = -2x^2 + 4x + 5$ uit Figuur 5 vertoont een afnemende stijging op het interval $]-\infty, 1]$ en een toenemende daling op het interval $[1, +\infty[$.



Figuur 5 *– Grafiek van de tweedegraadsfunctie f*

2. Ook derdegraadsfuncties zijn goede voorbeelden. Hier treedt een nieuw fenomeen op: waar de afnemende stijging bij de functie f met $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 4$ (zie Figuur 6) overgaat in de toenemende stijging, vertoont de grafiek een buigpunt. Omdat de functie vóór het buigpunt een afnemende stijging vertoont en na het buigpunt een toenemende stijging, bereikt de richtingscoëfficiënt van de raaklijn een minimum in het buigpunt.



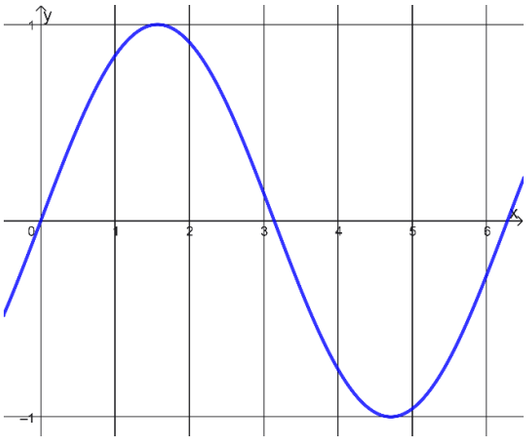
Figuur 6 *– Grafiek van de derdegraadsfunctie f*

In deelparagraaf 2.5 komen we nog in detail terug op derdegraadsfuncties.

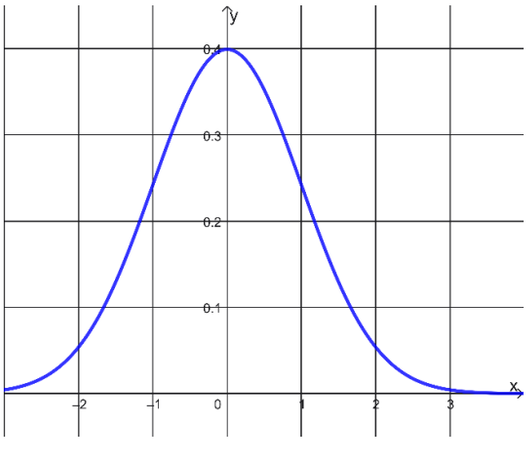
Ook al wordt dit niet opgelegd door het minimumdoel, toch pleiten we ervoor om het begrip buigpunt zeker ook in de louter grafische aanpak te gebruiken. Ze treden op in vier gevallen: bij de overgang van een afnemende naar een toenemende stijging (zoals in Figuur 6), bij de overgang van een toenemende naar een afnemende stijging (zoals bij de logistische functie in Figuur 9; in het buigpunt is de stijging dan het grootst), bij de overgang van een toene-

mende naar een afnemende daling (zoals bij de sinusfunctie in π en bij de standaardnormale dichtheidsfunctie in de rechterhelft; het buigpunt markeert de grootste daling, zie Figuur 7 en Figuur 8) en bij de overgang van een afnemende naar een toenemende daling (zoals wanneer we de functie uit Figuur 6 spiegelen ten opzichte van de horizontale as; in het buigpunt is de daling dan het kleinst).

3. De sinusfunctie combineert de vier gevallen van toenemende/afnemende stijging/daling, met twee buigpunten in elke periode. Ook de dichtheidsfunctie van een normale verdeling combineert de vier gevallen.



Figuur 7 *– Grafiek van de sinusfunctie*

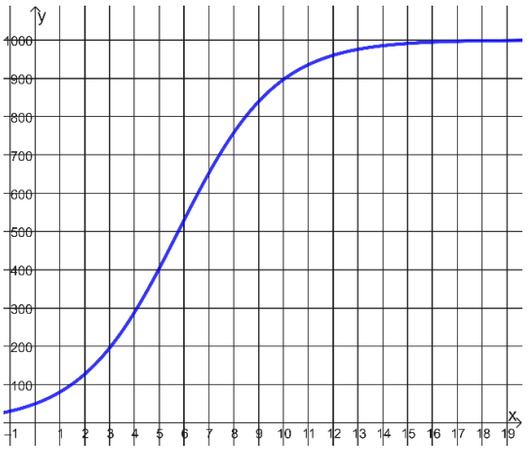


Figuur 8 *– Grafiek van de standaardnormale dichtheidsfunctie*

4. De functie f met voorschrift

$$f(x) = \frac{N}{1 + c \cdot g^x} = \frac{N}{1 + c \cdot e^{-ax}}$$

($N, a, c > 0$, $0 < g < 1$, zie Figuur 9) beschrijft logistische groei.



Figuur 9 *– Grafiek van de logistische functie met* $N = 1000$, $c = 19$ *en* $g = 0{,}6$

In de realiteit kan ('echte') lineaire groei nooit onbegrensd blijven doorgaan: op een zeker moment overschrijden we de grenzen van wat mogelijk is. Dat geldt nog veel meer voor exponentiële groei. Logistische groei is een groeiproces dat wél rekening houdt met de grenzen die door de omgeving opgelegd worden.

Dat exponentiële groei niet onbeperkt kan doorgaan, wordt bijvoorbeeld mooi uitgedrukt in het 'citaat' "Anyone who believes exponential growth can go on forever in a finite world is either a madman or an economist" (Quote Investigator, 2019). De aanhalingstekens rond het woord citaat wijzen op de mogelijkheid dat het misschien helemaal niemands citaat is.

Op de grafiek is te zien dat de populatie in een eerste periode sneller en sneller groeit. Voorbij het buigpunt, waar de groeisnelheid maximaal is, volgt een fase waarin de populatie trager en trager aangroeit. Op de lange termijn stabiliseert de populatie, in de grafiek te zien onder de vorm van een horizontale asymptoot (op hoogte N, dubbel zo hoog als het buigpunt). Dit nieuwe groeiproces laat aan de leerlingen ook zien dat groei niet per se lineair of exponentieel hoeft te zijn. Voor meer informatie over logistische groei verwijzen we naar Sanderson (s.d.) en Deprez en Verbeeck (2006).

1.5 Samengevat

Op dit punt (of al wat vroeger) is het goed om een samenvattend overzicht te geven van de zes gevallen. We doen dat in de vorm van de tabel die je vindt in deelparagraaf 1.8. Op dit ogenblik is daarin enkel de zwarte tekst van belang. In de tweede kolom van de tabel geven we voor elk van de zes gevallen een omschrijving (die we verderop

nog zullen aanvullen, zie de gekleurde tekst). In de derde kolom houden we de betekenis bij in termen van de raaklijnen en enkele andere verwoordingen. In de laatste kolom tonen we van elk geval een schets.

1.6 Van absolute waarde naar de afgeleide zelf

Om uit te drukken of een stijging of daling toenemend of afnemend is, hebben we hierboven gekeken naar de *absolute waarde* van de afgeleide of de richtingscoëfficiënt van de raaklijn: een stijging of daling is toenemend of afnemend naargelang deze absolute waarde toe- of afneemt. We moeten het toenemende of afnemende karakter van een stijging of daling echter ook in verband brengen met de afgeleide functie zelf, *zonder* absolute waarde.

Als een functie f een toenemende stijging vertoont, dan geldt: als x toeneemt, neemt $f'(x)$ toe. Dit betekent dat de afgeleide functie f' stijgend is. Bij een toenemende stijging is dus niet alleen de functie zelf stijgend maar ook de afgeleide. Bij een afnemende stijging is de functie zelf stijgend, maar de afgeleide dalend. Dat vullen we in de overzichtstabel in deelparagraaf 1.8 aan in het groen.

In het geval van een daling, ligt er wat meer werk op de plank. Zoals hierboven al aangehaald: om te bepalen of een *daling* toenemend of afnemend is, hebben we hierboven gekeken naar de *absolute waarde* van de afgeleide. Dat is logisch: het negatieve teken zit reeds vervat in het woord 'daling' en daarom wordt de grootte van de daling (en dus ook het toenemen of afnemen van deze daling) gebaseerd op de absolute waarde. We moeten nu echter de stap zetten naar het stijgen of dalen van de afgeleide, en daarvoor moeten we kijken naar de afgeleide als een getal *met een teken*.

Dit werken we nu uit. We grijpen hiervoor terug naar de functie $g(x) = 200 - 25 \cdot 1{,}1^x$ uit deelparagraaf 1.3, die een toenemende daling vertoont. De absolute waarde van de afgeleide wordt in dit voorbeeld groter en groter. De afgeleide zelf wordt dan 'meer en meer negatief', en dus kleiner. De afgeleide is dus *dalend*. Bij een toenemende daling is dus niet alleen de functie zelf dalend, maar ook de afgeleide. Dit vullen we aan in het groen in de overzichtstabel in deelparagraaf 1.8. We formuleren dit ook meetkundig met behulp van de rico van de raaklijn. Analoog geldt voor een afnemende daling dat de functie zelf dalend is, maar de afgeleide stijgend.

Deze overgang naar stijgen en dalen van de afgeleide functie, en in het bijzonder de twee dalende gevallen, vergen (steeds opnieuw) de nodige concentratie van de leerlingen (en de leraar), omwille van de botsing tussen wat er met de absolute waarde gebeurt en wat er met de afgeleide zelf gebeurt. Je leerlingen voldoende laten oefenen, waarbij ze ook zelf de verwoordingen uit de tabel moeten gebruiken, is daarom een must.

1.7 Tweede afgeleide

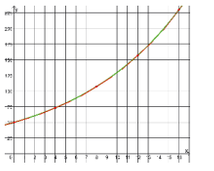
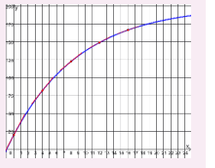
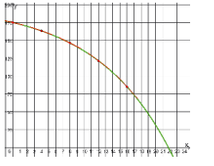
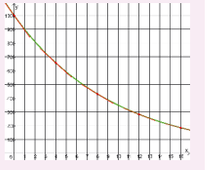
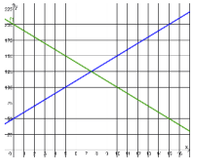
In studierichtingen waar de *tweede afgeleide* op het programma staat, blijft de studie van dit aspect van het functieverloop niet puur grafisch maar moet ook de rol van de tweede afgeleide aan bod komen. We werken ze in deze loep niet verder uit, maar geven wat toelichting.

Bij een toenemende stijging is niet alleen de functie zelf stijgend maar is ook de afgeleide stijgend. Het stijgend zijn van de afgeleide hangt dan samen met het positieve teken van de afgeleide van deze afgeleide, dus met het positieve teken van de tweede afgeleide. Bij een toenemende stijging zijn dus zowel de eerste als de tweede afgeleide stijgend. We vullen dit in het rood aan in de overzichtstabel in deelparagraaf 1.8. We vullen ook de andere gevallen aan.

In het geval van de constante stijging of daling, vinden we een mooie, nieuwe karakterisatie van eerstegraadsfuncties: ze zijn de (enige) functies waarvan de tweede afgeleide overal gelijk is aan 0.

1.8 Overzichtstabel

De overzichtstabel vind je in het groot op de volgende pagina.

toenemende stijging over een interval I	als x toeneemt over het interval I dan neemt $f(x)$ toe en neemt $f'(x) = \lvert f'(x)\rvert$ toe	f is stijgend en de raaklijnen worden steiler en steiler de grafiek stijgt en wordt steiler en steiler f stijgt sneller en sneller f is stijgend en f' is stijgend f' is positief en f'' is positief	
afnemende stijging over een interval I	als x toeneemt over het interval I dan neemt $f(x)$ toe en neemt $f'(x) = \lvert f'(x)\rvert$ af	f is stijgend en de raaklijnen worden minder en minder steil de grafiek stijgt en wordt minder en minder steil f stijgt trager en trager f is stijgend en f' is dalend f' is positief en f'' is negatief	
toenemende daling over een interval I	als x toeneemt over het interval I dan neemt $f(x)$ af en neemt $\lvert f'(x)\rvert$ toe als x toeneemt over het interval I dan neemt $f(x)$ af en wordt $f'(x)$ 'meer en meer negatief' en dus kleiner, d.w.z. dan neemt $f'(x)$ af	f is dalend en de raaklijnen worden steiler en steiler de grafiek daalt en wordt steiler en steiler f daalt sneller en sneller de functie is dalend en de rico van de raaklijnen wordt 'meer en meer negatief', d.w.z. de rico van de raaklijnen wordt kleiner en kleiner f is dalend en f' is dalend f' is negatief en f'' is negatief	
afnemende daling over een interval I	als x toeneemt over het interval I dan neemt $f(x)$ af en neemt $\lvert f'(x)\rvert$ af als x toeneemt over het interval I dan neemt $f(x)$ af en wordt $f'(x)$ 'minder en minder negatief' en dus groter, d.w.z. dan neemt $f'(x)$ toe	f is dalend en de raaklijnen worden minder en minder steil de grafiek daalt en wordt minder en minder steil f daalt trager en trager de functie is dalend en de rico van de raaklijnen wordt 'minder en minder negatief', d.w.z. de rico van de raaklijnen wordt groter en groter f is dalend en f' is stijgend f' is negatief en f'' is positief	
constante stijging/daling over een interval I	als x toeneemt over het interval I dan neemt $f(x)$ toe/af en blijft $\lvert f'(x)\rvert$ constant	f is stijgend/dalend en de raaklijnen blijven even steil de grafiek stijgt/daalt en is overal even steil f stijgt/daalt overal even snel enkel van toepassing voor (en dus kenmerkend voor) eerstegraadsfuncties f'' is overal 0	

***Tabel 1** – Overzichtstabel functieverloop*

1.9 Betekenis van de tweede afgeleide

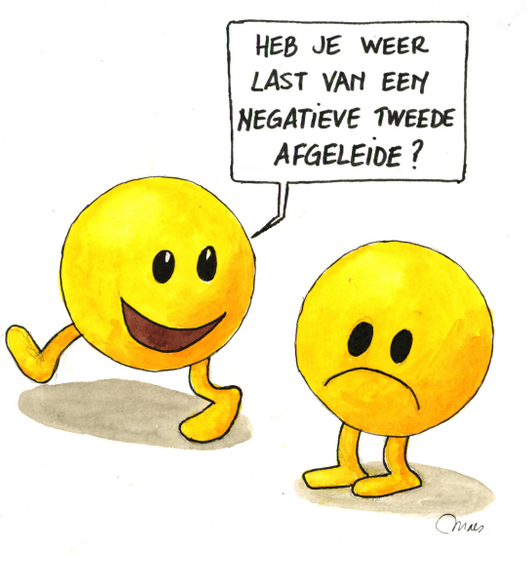
Misschien zat je al een poosje op hol en bol te wachten … We willen dit in de klas niet te vroeg aan bod laten komen. We vinden het immers belangrijk dat leerlingen eerst een goed inzicht krijgen in toenemend/afnemend stijgen/dalen. Dit zijn immers facetten van het functieverloop die in allerlei toepassingen meer betekenis hebben dan het hol of bol zijn van de grafiek. Maar op een bepaald ogenblik valt er natuurlijk niet aan te ontkomen.

We bespreken dit hier na de paragraaf over tweede afgeleide en vernoemen de tweede afgeleide ook in de bespreking. Dat neemt niet weg dat je het ook over hol en bol kunt hebben zonder de tweede afgeleide. Ook al verlies je natuurlijk iets als je de tweede afgeleide weglaat, toch blijft de tekst hieronder overeind.

Zoals bij de bergparabool in Figuur 5 te zien is, kun je het afnemend stijgende deel en het toenemend dalende deel van de grafiek zien als één geheel. Beide delen hebben een gemeenschappelijk kenmerk, namelijk dat de grafiek zijn bolle kant naar boven keert. Ook analytisch is er een gemeenschappelijk kenmerk: in beide gevallen is de afgeleide dalend en is de tweede afgeleide dus negatief. Dat wordt bevestigd door in termen van de raaklijnen te denken. Over het hele domein van de functie geldt: als x toeneemt, neemt de rico van de raaklijnen af; in dit geval: van 'erg positief' in het begin over 'minder en minder positief' naar nul (in het afnemend stijgende deel tot aan de top), en van daar verder 'meer en meer negatief' (in het toenemend dalende deel vanaf de top). We zien dus dat twee van de vier gevallen uit de tabel samengenomen kunnen worden tot één: de grafiek keert zijn bolle zijde naar boven, de eerste afgeleide is dalend, de tweede afgeleide is negatief.

Op dezelfde manier kunnen 'afnemend dalend' en 'toenemend stijgend' samengenomen worden in één geval: de grafiek keert zijn holle zijde naar boven, de eerste afgeleide is stijgend, de tweede afgeleide is positief.

De reductie van vier tot twee gevallen maakt het gemakkelijker. Bovendien is er het bekende eenvoudige mnemotechnische middeltje met de smileys om het verband te onthouden tussen het teken van de tweede afgeleide en het hol of bol zijn van de grafiek.



Het wordt ook gemakkelijker om te omschrijven wat een buigpunt is: een buigpunt markeert de overgang tussen hol en bol (tenminste als beide delen van de grafiek zo bij elkaar komen dat er in de overgang één raaklijn is).

Hier past een waarschuwing. De eenvoud en het mnemotechnisch middeltje zijn verleidelijk, maar je mag de automatisering niet zo ver doordrijven dat de oorspronkelijke betekenis van toenemend en afnemend stijgen en dalen ondergesneeuwd raakt. Leer je leerlingen dus ook de weg terug te bewandelen. Bijvoorbeeld: als de eerste afgeleide negatief is en de tweede afgeleide positief, dan zitten we bij de linkerkant van het lachende mondje en hebben we dus te maken met een afnemende daling.

Er is nog een andere manier om het teken van de tweede afgeleide (of het stijgen of dalen van de eerste afgeleide) te interpreteren. Beeld je in dat de grafiek een weg in bovenaanzicht is waar je van links naar rechts over rijdt. Als de tweede afgeleide positief is en de holle zijde van de grafiek dus naar boven gericht is, dan maakt de weg een bocht naar links. Is de tweede afgeleide negatief, dan maakt de weg een bocht naar rechts. In een buigpunt rijd je 'eventjes' recht vooruit.

Nulpunten van de tweede afgeleide moeten hier ook aandacht krijgen. Als de tweede afgeleide nul is *over een heel interval* I, dan is de grafiek een deel van een rechte. Dit is hierboven al aan bod gekomen. Verder houden nulpunten van de tweede afgeleide verband met buigpunten, maar zoals bekend is het verband niet helemaal eenduidig. Zo heeft de grafiek van $f(x) = x^4$ geen buigpunten

maar er is wel een nulpunt van f''. Dit werken we hier niet verder uit.

We kunnen alleen het *teken* en de *nulpunten* van de tweede afgeleide een betekenis geven. De grootte van de tweede afgeleide heeft geen eenvoudige interpretatie. Die meet bijvoorbeeld *niet* hoe sterk de kromming is. De kromming hangt op een niet-triviale manier af van zowel de eerste als de tweede afgeleide (zie bv. Roelens, 2006).

2 Het verband tussen een functie en haar afgeleide

In deze paragraaf belichten we een tweede onderwerp. In deelparagraaf 2.2 t.e.m.deelparagraaf 2.5 hebben we lesactiviteiten uitgewerkt die bij dit onderwerp passen. In deelparagraaf 2.1 geven we een korte beschrijving van een mogelijke leerlijn voor dit onderwerp, waarbij we deze vier lesactiviteiten inpassen.



2.1 De leerlijn

We laten de leerlijn beginnen bij het grafisch bepalen van de afgeleide van een functie in een punt. Daarvoor maak je gebruik van de meetkundige betekenis van de afgeleide als richtingscoëfficiënt van de raaklijn. De raaklijn teken je dan op het gevoel. Je kunt de afgeleide dan niet heel precies bepalen, maar je kunt bijvoorbeeld wel het teken van de afgeleide bepalen en een inschatting maken van de grootte. Beperk je hierbij niet tot situaties met gelijke eenheden op beide assen. Immers, lang niet alle functies lenen zich hiertoe. Bovendien heeft het in contexten vaak geen zin om gelijke eenheden te kiezen omdat de afhankelijke en onafhankelijke veranderlijke in andere eenheden uitgedrukt worden.

De lesactiviteit uit deelparagraaf 2.2 past in de volgende stap. Hij vertrekt met een voorbeeld, waarin we de leerlingen een aantal verbanden laten leggen tussen de grafiek van een functie en die van haar afgeleide. Dit leidt tot de gekende manier om uit de tekentabel van de afgeleide functie informatie te halen over stijgen en dalen en extrema van de functie zelf. In de lesactiviteit is met een voorbeeld gewerkt, maar de redeneringen zijn algemeen toepasbaar. De gevonden verbanden moeten nu algemeen geformuleerd en ingeoefend worden. Je zou de oefenfase kunnen

afsluiten met de ongewone oefening uit de lesactiviteit uit deelparagraaf 2.3. Leerlingen krijgen vijf grafieken waarvan ze moeten bepalen of ze in overeenstemming zijn met een tekentabel van de afgeleide. Ze blijken alle vijf te voldoen, ook al zijn ze op een aantal punten verschillend. Dit toont aan de leerlingen dat de tekentabel van de afgeleide weliswaar toelaat om een aantal aspecten van het functieverloop te achterhalen (stijgen, dalen, extrema), maar dat het de grafiek zeker niet volledig vast legt.

De lesactiviteit uit deelparagraaf 2.3 kan de opstap vormen om in een volgende fase een stap verder te zetten en te vertrekken van een tabel waarin niet enkel het tekenverloop van de afgeleide gegeven is, maar ook het stijgen en dalen van de afgeleide. Je kunt hier dan meer kenmerken van de functie zelf uit halen: niet enkel stijgen, dalen en extrema, maar ook het toenemend en afnemend karakter van de stijging of daling en het optreden van buigpunten. Dit hebben we niet uitgewerkt.

We zijn in deze loep tot nu toe heel erg binnen de wiskunde zelf gebleven. In deelparagraaf 2.4 hebben we een oefening uitgewerkt in een context: het op- en ontladen van een batterij. Als de school zonnepanelen en een batterij heeft, zou je een eigen versie kunnen uitwerken die daar betrekking op heeft.

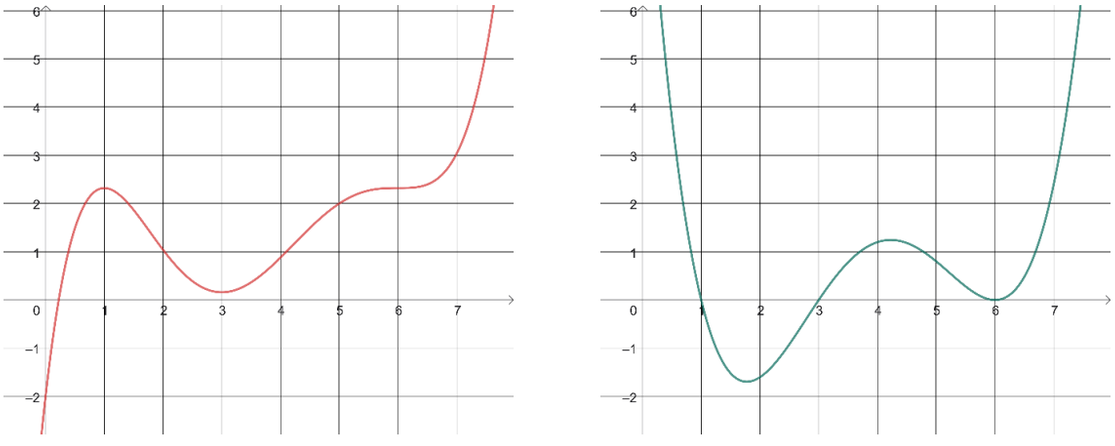
Daar kan de leerlijn stoppen voor het minimumdoel over het leggen van het grafische verband tussen een functie en haar afgeleide. In deelparagraaf 2.5 hebben we een lesactiviteit uitgewerkt voor studierichtingen waar het verband ook vanuit algebraïsch perspectief behandeld wordt. Het GeoGebrabstand waarnaar verwezen wordt, vind je op onze website. In deze lesactiviteit stellen we ons de vraag welke types van derdegraadsfuncties er bestaan. In Roelens (1992) werd diezelfde vraag (en de analoge vraag voor vierdegraadsfuncties) vanuit een ander oogpunt bekeken.

2.2 Grafiek van een functie en haar afgeleide

LESACTIVITEIT

Grafiek van een functie en haar afgeleide

In de figuur hieronder zie je de grafiek van een functie f (links) en de grafiek van de afgeleide functie f' (rechts).



1 Op de rechtse grafiek kun je aflezen dat de afgeleide functie f' nulwaarden 1, 3 en 6 heeft. Kijk nu naar de linkse grafiek. Welke gemeenschappelijke eigenschap hebben de punten met deze drie x-coördinaten?

✔ *We weten dat de afgeleide in deze punten nul is. De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in elk van deze punten is dus nul. Met andere woorden: de raaklijn is horizontaal. Leerlingen zouden hier ook kunnen verwijzen naar het optreden van een minimum of maximum, maar we hebben expliciet gekozen voor een voorbeeld dat laat zien dat dit niet het hele verhaal is.*

2 Op de linkse grafiek lees je af dat de functie f stijgend is in het interval $]-\infty,1[$. In de rechtse grafiek zien we dat de afgeleide functie positief is in datzelfde interval. Leg uit wat het verband is tussen deze beide vaststellingen.

✔ *Waar de functie f stijgend is, hebben de raaklijnen een positieve richtingscoëfficiënt. In deze punten is de afgeleide dus positief. Bemerk dat we hier (en in de vorige vraag) expliciet gebruik maken van de meetkundige betekenis van de afgeleide als richtingscoëfficiënt van de raaklijn. We vertalen het stijgend zijn van de functie dus in het positief zijn van de richtingscoëfficiënten van de raaklijnen.*

3 Leg nu ook een verband tussen een kenmerk van de functie f en een kenmerk van de afgeleide functie f' in het interval $[1,3[$.

✔ *De functie f is er dalend en de raaklijnen hebben een negatieve richtingscoëfficiënt, wat zich vertaalt in het negatief zijn van de afgeleide in dit interval.*

4 Voor welke andere intervallen kun je nog een dergelijk verband leggen?

✔ *interval $]3,6[$: f is (strikt) stijgend, f' is (strikt) positief*

interval $]6,+\infty[$: f is (strikt) stijgend, f' is (strikt) positief

Je zou hier ook ineens het hele interval $]3,+\infty[$ kunnen noemen en het woord 'strikt' weglaten.

5 Bedek de linkse grafiek zodat je die niet meer kunt zien. Kijk naar de rechtse grafiek. Hoe kun je hierin zien dat de functie f wél een maximum bereikt in 1, maar dat ze geen maximum bereikt in 6?

✔ *Links van 1 is f' positief en rechts van 1 is f' negatief. Dit betekent dat f eerst stijgt en daarna daalt, zodat f een (relatief of lokaal) maximum bereikt in 1. Voor 6 is het anders: links van 6 stijgt f en rechts van 6 stijgt f verder (zowel links als rechts van 6 is f' positief).*

We hebben in de voorgaande vragen verbanden gelegd tussen kenmerken van de functie f en haar afgeleide functie f'. We hebben hierbij gebruik gemaakt van de grafiek van beide functies. We gingen soms van links naar rechts (bv. bij vraag 1), en soms andersom (bv. bij vraag 5). In het vervolg zullen we deze verbanden altijd als volgt gebruiken: we vertrekken van een tekentabel (en dus niet van de grafiek) van de afgeleide f' en we leiden daaruit kenmerken af van de functie f. Wat we hierboven voor het voorbeeld gevonden hebben, vatten we samen in het onderstaande schema.

x		1		3		6	
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	+
$f(x)$	↗	max	↘	min	↗		↗

Bovenaan in het schema staan de gebruikte kenmerken van de afgeleide functie, namelijk de nulpunten en de tekens. De eerste twee lijnen van het schema vormen dus een tekentabel van de afgeleide functie f'. De derde lijn toont welke besluiten we hieruit trekken over de functie f zelf. Deze besluiten hebben betrekking op het stijgen en dalen en het optreden van maxima en minima van f.

2.3 Vijf grafieken en één tekentabel

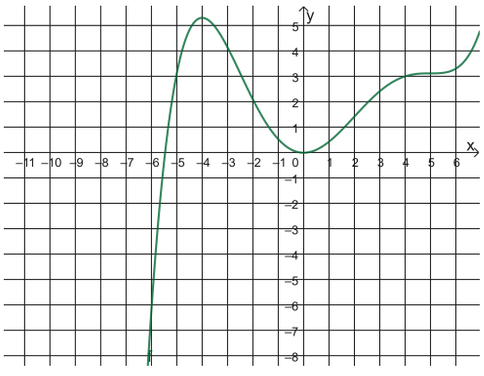
LESACTIVITEIT

Vijf grafieken en één tekentabel

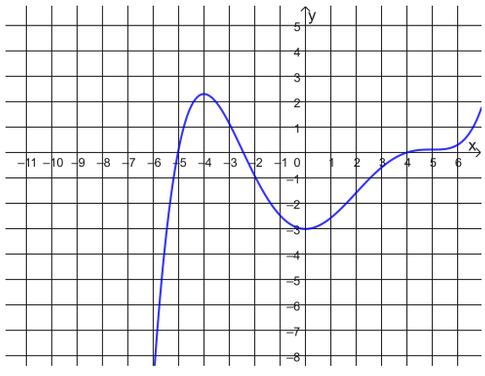
1 Hieronder zie je een tekentabel van de afgeleide van een zekere functie f. Je ziet ook vijf grafieken. Welke van deze vijf zouden de grafiek van f kunnen zijn? Er is niet noodzakelijk juist één goed antwoord!

x		-4		0		5	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

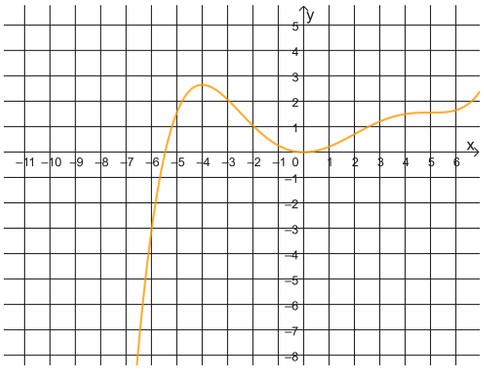
Grafiek A



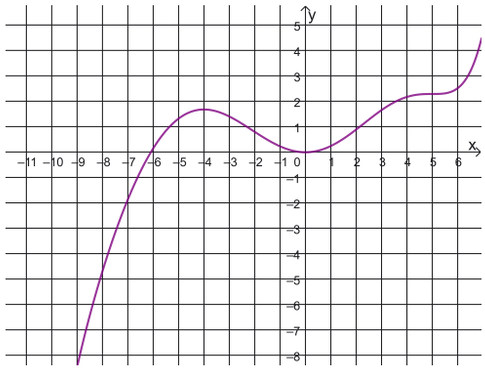
Grafiek B



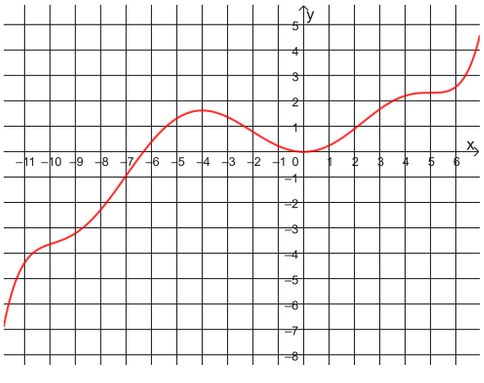
Grafiek C



Grafiek D



Grafiek E



✔ *Ze zijn alle vijf in overeenstemming met het schema! Op basis van de tekentabel van f' kunnen we enkel besluiten dat de functie f een horizontale raaklijn heeft in -4, 0 en 5, dat ze (strikt) stijgend is op de intervallen $]-\infty,-4[$, $]0,5[$ en $]5,+\infty[$ en dalend op het interval $]-4,0[$, en dat ze bijgevolg een (lokaal of relatief) maximum bereikt in -4 en een (lokaal of relatief) minimum in 0 (maar niet in 5). Elk van de vijf grafieken voldoet hier aan.*

2 Geef overeenkomsten en verschillen tussen deze vier grafieken.

✔ *Voor de overeenkomsten: zie het antwoord op de vorige vraag. Een eerste verschil dat leerlingen zouden kunnen opmerken, is dat sommige functies andere nulpunten hebben. Verder is in grafieken A, B en C de functiewaarde in 5 kleiner dan die in −4, terwijl het andersom is in grafieken D en E. Nog een ander verschil is dat in grafieken A, B, C en D de functie een afnemende stijging vertoont over het hele interval $]-\infty,-4[$, terwijl de functie in grafiek E daar wisselt van afnemend naar toenemend en tot slot weer afnemend stijgen. Dit zijn dus allemaal kenmerken die we niet kunnen achterhalen op basis van de tekentabel van de afgeleide.*

Voor de lezer geven we wat achtergrond over de functies die we hier gebruikten. De functie in grafiek A is een primitieve van de functie g_A met voorschrift $g_A(x)=\frac{1}{100}x(x+4)(x-5)^2$. Grafiek B ontstaat door grafiek A over 3 eenheden naar onder te verschuiven en grafiek C vind je door grafiek A verticaal te vermenigvuldigen met factor 0,5. De functie die bij grafiek D hoort is een primitieve van de functie g_D met voorschrift $g_D(x)=\frac{1}{200}g_A(x)\cdot\left(x^2+19x+100\right)$. Omdat de bijkomende kwadratische factor overal positief is, is de tekentabel van de afgeleide (in dit geval dus de tekentabel van g_D) hetzelfde als bij grafiek A. Analoog is de functie die bij grafiek E hoort een primitieve van de functie g_E met voorschrift $g_E(x)=\frac{1}{200}g_A(x)\cdot\left(x^2+19{,}95x+100\right)$. Ook hier is de bijkomende factor overal positief. Hij is zo gekozen dat de tweede afgeleide (hier dus de afgeleide van g_E) twee nulpunten heeft links van −4. Dat zorgt ervoor dat het verloop nu meer wezenlijk verschilt van dat van de andere functies.

2.4 Een contextoefening

LESACTIVITEIT

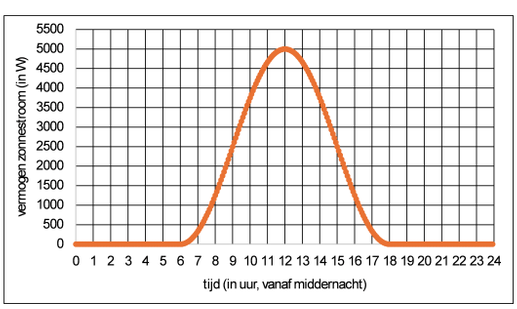
Plug-in-batterij

Meneer Ampère en mevrouw Volt hebben zonnepanelen op hun dak liggen en hebben recent een plug-in-batterij geïnstalleerd. Ze houden nauwgezet een aantal gegevens hierover bij. In de onderstaande figuur zie je vier grafieken die hier verband mee houden:

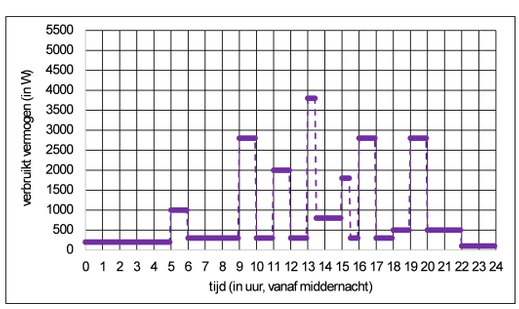
- grafiek A toont de evolutie van het vermogen dat door de zonnepanelen opgewekt werd doorheen een bepaalde lentedag waarin er geen wolkje aan de hemel was;
- grafiek B toont de evolutie van het verbruik van het gezin gedurende diezelfde dag;
- grafiek C toont de evolutie van het vermogen dat de batterij gedurende deze dag opnam of afgaf;
- grafiek D toont de evolutie van de hoeveelheid energie in de batterij.

Horizontaal is de tijd uitgezet (voor één volledige dag, in uur vanaf middernacht)

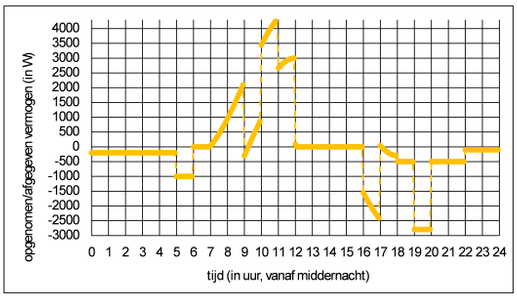
grafiek A



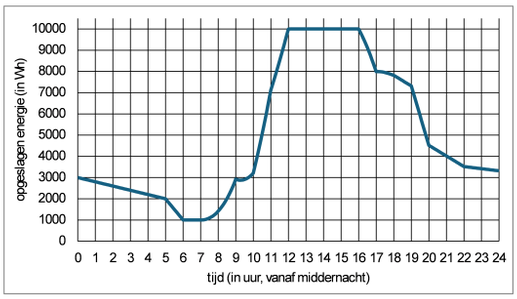
grafiek B



Grafiek C



Grafiek D



1 Tussen middernacht en 5u leverde de batterij stroom (aan een vermogen van 200 W). Dat kun je uit grafiek C aflezen. Hoe kun je dit verklaren aan de hand van grafieken A en B?

✔ *Grafiek A toont (en ons gezond verstand bevestigt) dat de zonnepanelen geen stroom leverden. Grafiek B toont dat er wel stroom verbruikt werd. Er werd dus een beroep gedaan op de batterij.*

2 Leg nu ook een verband met grafiek D.

✔ *We zien dat de hoeveelheid energie in de batterij tijdens dit tijdsinterval afnam van* 3000 *Wh tot* 2000 *Wh, aan een constante snelheid van* 200 *W per uur.*

3 Leg uit waarom grafiek D een sterkere daling vertoont tussen 5u en 6u.

✔ *Er was toen nog altijd geen zonnestroom en het verbruik was een stuk groter (bv. omdat de warmtepomp opgesprongen is om het huis nog wat op te warmen, of om water op te warmen).*

4 Beschrijf wat er tussen 6u en 7u gebeurt

✔ *De zonnepanelen produceren, zeker in het begin van dit tijdsinterval, nog niet voldoende om het verbruik te compenseren. Je zou dan verwachten dat de batterij bijspringt. In grafiek C zien we echter dat de batterij geen stroom levert. Grafiek D bevestigt dit: de hoeveelheid opgeslagen energie blijft constant. Dat kan verwondering wekken want de batterij is nog niet leeg. Blijkbaar is er een mechanisme dat ervoor zorgt dat de batterij niet volledig ontladen wordt.*

5 Beschrijf wat er de reste van de dag gebeurt.

✔ *In grafiek D zien we dat de batterij vanaf* 7*u opgeladen werd, tot ze om* 12*u vol was, en dat ze vanaf* 16*u stroom leverde.*

6 Hoe kun je in grafiek C aflezen

a) of de batterij op een bepaald ogenblik stroom aan het opnemen dan wel afgeven was?

b) dat er rond 9u eventjes zonnestroom tekort was om het volledige verbruik te dekken?

c) of de batterij op een bepaald ogenblik *snel* of *traag* aan het leeglopen was?

d) dat de batterij tussen 12u en 16u geen stroom opnam of afgaf?

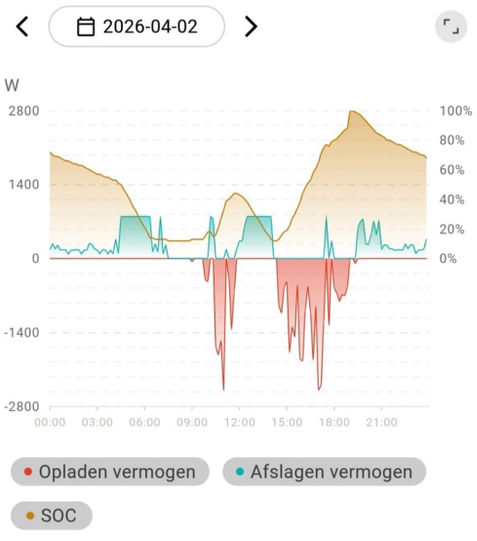
✔ *a) De batterij neemt stroom op als grafiek C zich boven de horizontale as bevindt en geeft stroom af als grafiek C zich onder de horizontale as bevindt. b) Rond* 9*u dook grafiek C even onder de horizontale as. c) De batterij loopt* snel *leeg als grafiek C zich* ver *onder de horizontale as bevindt. Grafiek D gaat dan steil naar beneden. d) Het overeenkomstige deel van grafiek C ligt dan op de horizontale as.*

7 Met welk wiskundig begrip zou je het verband tussen grafiek C en grafiek D kunnen beschrijven?

✔ *De functie in grafiek C is de afgeleide van de functie in grafiek D, tenminste in de punten waar deze laatste functie afleidbaar is. Grafiek C toont ons dus hoe de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan grafiek D evolueert. Een mooie oefening is om na te gaan dat de eenheden kloppen. In grafiek*

D wordt de afhankelijke veranderlijke uitgedrukt in Wh en de onafhankelijke veranderlijke in uur. De afgeleide wordt dus uitgedrukt in Wh per uur, en dus in W. De afhankelijke veranderlijke in grafiek C wordt inderdaad in deze eenheid uitgedrukt. Je kunt het verband natuurlijk ook omgekeerd uitdrukken: de functie in grafiek D is de primitieve van de functie uit grafiek C met beginwaarde 3000 *in* 0.

Tot nu toe hebben we gewerkt met grafieken die we zelf speciaal gemaakt hebben voor deze oefening. De figuur hiernaast toont een schermafdruk uit de app van een echte plug-in-batterij. Het gaat over een andere batterij dan die van hierboven (de capaciteit bedraagt slechts 5120 Wh, wat in de schermafdruk overigens niet onmiddellijk af te lezen is). Het gaat ook niet over dezelfde dag als hierboven. Je merkt dat de grafieken een grilliger verloop vertonen dan die van hierboven.



7 Welk van de drie grafieken uit de schermafdruk toont de evolutie van de hoeveelheid energie in de batterij (en is dus het equivalent van grafiek D in deze nieuwe situatie)?

✔ *Dat is de oranje grafiek. De verticale as die bij deze grafiek hoort, is die aan de rechterkant. De hoeveelheid energie wordt nu niet uitgedrukt in kWh maar als een percentage van de totale capaciteit van de batterij. De afkorting SOC staat voor 'state of charge'. Horizontaal is de tijd uitgezet (voor één volledige dag, in uur vanaf middernacht), maar deze schaalverdeling kun je niet goed zien op de schermafdruk. Dat het gebied tussen de kromme en de horizontale as gekleurd is, draagt bij aan de leesbaarheid (en de esthetiek) van de figuur, maar het zou je ook op het verkeerde been kunnen zetten: je leest de hoeveelheid opgeslagen energie wel degelijk af als de hoogte in de grafiek, niet als de oppervlakte onder de kromme.*

8 Vind je ook het equivalent van grafieken A, B en C terug in de schermafdruk?

✔ *De groene grafiek toont enkel positieve waarden en de rode grafiek enkel negatieve. Waar de groene grafiek hoge waarden vertoont, daalt de oranje grafiek sterk. Waar de rode grafiek sterk negatieve waarden vertoont, stijgt de oranje grafiek sterk. De groene en de rode grafiek vormen samen grafiek C, maar dan wel tegengesteld. Dit klopt met de legende, waar je vindt dat (wat onhandig geformuleerd) rood staat voor 'opladen vermogen' en groen voor 'afslagen vermogen'. De verticale as is nu die aan de linkerkant. Overigens kun je op basis van de grafiek vermoeden dat het geleverde vermogen begrensd is. Dat klopt inderdaad: de batterij mag om veiligheidsredenen maximaal* 800 *W leveren.*

✔ *Er is geen equivalent voor grafieken A en B. Dat hoeft niet te verwonderen: de app van de batterij toont enkel gegevens die verband houden met de batterij zelf, en niet met de zonnepanelen of het verbruik.*

2.5 Derdegraadsfuncties

LESACTIVITEIT

Derdegraadsfuncties

Bij tweedegraadsfuncties kunnen we twee types grafieken onderscheiden naargelang van de waarde van de coëfficiënt van x^2: dalparabool of bergparabool. Als we ook letten op het aantal nulpunten, zijn er zes types: zowel bij de dalparabolen als bij de bergparabolen kunnen we dan immers nog drie gevallen onderscheiden, naargelang van de waarde van de discriminant (strikt positief, nul of strikt negatief).

Maar hoe zit dat bij derdegraadsfuncties, dus functies van de vorm $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ met $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$? Op deze vraag zoeken we hier een antwoord.

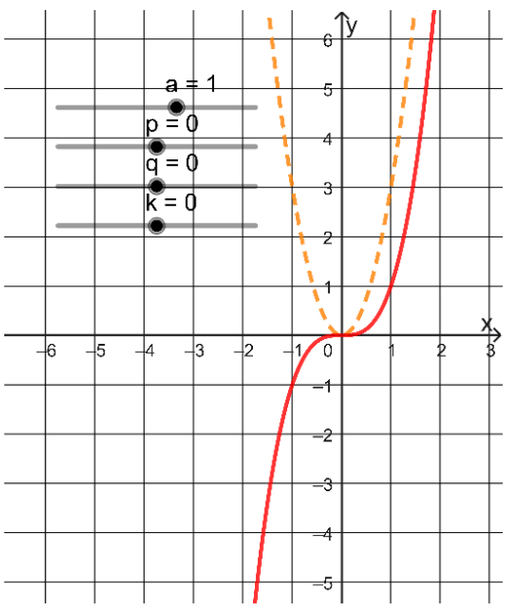
We maken hierbij gebruik van de afgeleide van zo'n derdegraadsfunctie. Deze afgeleide geeft ons immers informatie over het stijgen en dalen van de derdegraadsfunctie.

1 Bereken de afgeleide van de algemene derdegraadsfunctie van hierboven. Over welke soort functie gaat het?

✔ *We leiden af naar de variabele x. De coëfficiënten, die hier door letters voorgesteld worden, beschouwen we dus als constant. De afgeleide is bijgevolg $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. De afgeleide is met andere woorden een tweedegraadsfunctie.*

Open het GeoGebrabestand derdegraadsfuncties.ggb. Je ziet (zoals in de figuur hiernaast) twee grafieken: in het rood de grafiek van een derdegraadsfunctie en in oranje streeplijn de grafiek van haar afgeleide. We hebben het voorschrift van de afgeleide in een handigere vorm gezet: $f'(x) = 3a(x-p)^2+q$, met $p, q \in \mathbb{R}$ (in het GeoGebrabestand gebruikten we f_{accent} voor f')

In het algebravenster van het GeoGebrabestand kun je zien dat we in feite omgekeerd gewerkt hebben: we hebben eerst de afgeleide functie gedefinieerd en we hebben vervolgens de derdegraadsfunctie geïntroduceerd als een primitieve functie hiervan. Dat betekent dat we voor de derdegraadsfunctie gewerkt hebben met $f(x) = a(x-p)^3 + qx + k$, waarbij k de integratieconstante is.



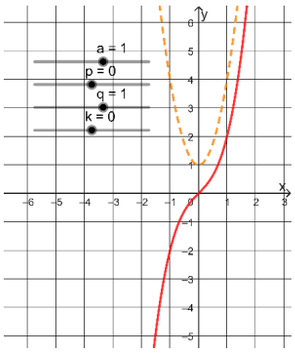
2 Ken je nog de grafische betekenis van p en q?

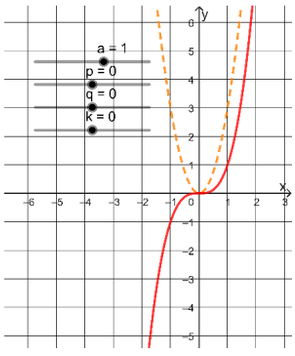
✔ *p en q zijn de x- en y-coördinaat van de top van de parabool.*

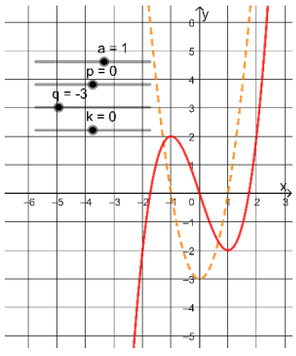
3 Stel de volgende waarden in via de schuifbalken: $a = 1$, $p = 0$ en $k = 0$. Varieer nu de waarde van q. Welke types krijg je voor het verloop van de derdegraadsfunctie? Verklaar aan de hand van het verloop van haar afgeleide.

✔ *We kunnen drie types onderscheiden. Als $q > 0$, is de derdegraadsfunctie stijgend over heel $\mathbb{R}$. Er is een buigpunt in 0 en de buigraaklijn heeft een positieve richtingscoëfficiënt. Als $q = 0$, is de derdegraadsfunctie nog altijd overal stijgend, maar is de buigraaklijn horizontaal. Als $q < 0$,*

heeft de functie twee extrema. Ze is dan eerst stijgend, dan dalend en tot slot weer stijgend en bereikt dus eerst een maximum en vervolgens een minimum. Ook dan is er een buigpunt en de buigraaklijn heeft een negatieve richtingscoëfficiënt. Dit alles valt te verklaren uit het tekenverloop van de afgeleide functie $f'(x) = 3ax^2 + q$, die een dalparabool als grafiek heeft die de horizontale as niet snijdt ($q > 0$), raakt ($q = 0$) of twee keer snijdt ($q < 0$). We zien de drie types in de grafieken hieronder.

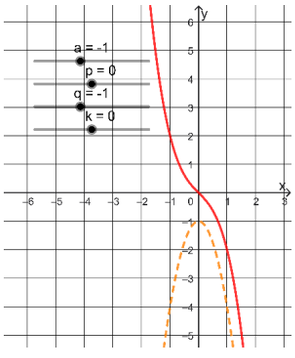


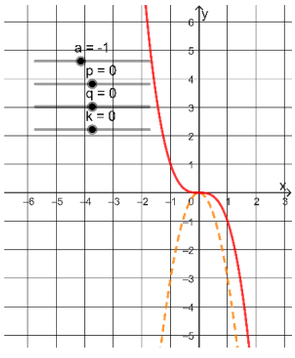


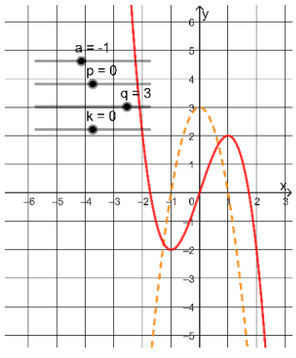


4 Verander de waarde van a nu naar -1 en varieer de waarde van q opnieuw. Welke types krijg je nu? Zie je overeenkomsten en verschillen met je antwoord op de vorige vraag?

✔ *Ook nu krijgen we drie types. De grafieken zijn gespiegeld ten opzichte van de horizontale as. En ze treden op bij tegengestelde waarde van q: de dalende functies bij $q < 0$ en $q = 0$, en de functie met twee extrema bij $q > 0$. Je ziet de nieuwe drie types in de figuren hieronder.*







5 Onderzoek de invloed van de parameter a (nog steeds met $p = 0$ en $k = 0$).

✔ *De vorm van de grafiek verandert, maar het type verandert niet zolang het teken van a ongewijzigd blijft.*

6 Op basis van het voorschrift $f(x) = a(x - p)^3 + qx + k$, kun je een vermoeden formuleren voor de invloed van de parameter k. Doe dat en controleer of dat vermoeden klopt.

✔ *De parameter verschijnt als een term '$+k$' in het voorschrift van f en we kunnen dus verwachten dat hij voor een verticale verschuiving zorgt. Dat klopt inderdaad. Deze parameter heeft dus geen invloed op het type grafiek.*

7 Onderzoek tot slot de invloed van de parameter p. Verklaar aan de hand van het voorschrift van f'.

✔ *Ook deze parameter heeft geen invloed op het type grafiek. Hij bepaalt de x-coördinaat van het buigpunt, wat bevestigd wordt door de tweede afgeleide te berekenen: $f''(x) = 6a(x - p)$.*

Parameter p doet de grafiek tegelijk horizontaal en verticaal verschuiven. Dat kun je zien als je het voorschrift in de volgende vorm schrijft: $f(x) = a(x-p)^3 + q(x-p) + qp + k$.

8 Gebruik je bevindingen nu om een antwoord te geven op de vraag hoeveel types derdegraadsfuncties er zijn. Geef voor elk type ook een eenvoudig, typisch voorbeeld.

✔ *We kunnen zes types onderscheiden, naargelang van de tekens van a en q. We hebben in de voorgaande vragen gemerkt dat de parameters p en k en de precieze waarde van a en q geen invloed hebben op het type:*

- *als* $q = 0$*, dan is de derdegraadsfunctie overal stijgend (als* $a > 0$*) of overal dalend (als* $a < 0$*) met horizontale buigraaklijn; voorbeelden zijn* $f_1(x) = x^3$ *en* $f_2(x) = -x^3$*;*
- *als a en q hetzelfde teken hebben, dan is de derdegraadsfunctie overal stijgend (als* $a > 0$*) of overal dalend (als* $a < 0$*) met een buigraaklijn die niet horizontaal is: voorbeelden zijn* $f_3(x) = x^3 + x$ *en* $f_4(x) = -x^3 - x$*; het verloop van de functie* f_3 *(bijvoorbeeld) kun je op een alternatieve manier beredeneren door ze te zien als de som van twee gekende 'basisfuncties' die beide stijgend zijn;*
- *als a en q een verschillend teken hebben, dan heeft de derdegraadsfunctie twee extrema; als* $a > 0$*, dan is de functie eerst stijgend, dan dalend en vervolgens weer stijgend en bereikt ze dus eerst een maximum en daarna een minimum; als* $a < 0$*, dan is de functie eerst dalend, dan stijgend en vervolgens weer dalend en bereikt ze dus eerst een minimum en daarna een maximum; in beide gevallen heeft de functie een buigpunt tussen de twee extrema; voorbeelden zijn* $f_5(x) = x^3 - x$ *en* $f_6(x) = -x^3 + x$ *(of* $f_5(x) = x^3 - 3x$ *en* $f_6(x) = -x^3 + 3x$ *als je 'mooiere' extrema wil); ook hier kun je het verloop van (bijvoorbeeld)* f_5 *op een alternatieve manier beredeneren. Denk in termen van de snelheid waarmee de twee termen in het voorschrift stijgen: aanvankelijk stijgt* x^3 *sneller dan* $3x$ *en dan wint de eerste term en stijgt* $x^3 - 3x$*, tussen* -1 *en* 1 *stijgt* x^3 *minder snel dan* $3x$ *en dan daalt* $x^3 - 3x$*, tot slot stijgt* x^3 *weer sneller dan* $3x$ *(zie de 'tweetermfuncties' uit Deprez e.a (1996)).*

Als we niet alleen oog hebben voor het stijgen en dalen van de derdegraadsfunctie maar ook voor het aantal nulpunten en hun ligging, dan wordt de situatie onoverzichtelijk. Daarom zullen we dit niet in detail onderzoeken. We stellen wel de volgende algemenere vraag:

9 Welke mogelijkheden zijn er voor het aantal nulpunten van een derdegraadsfunctie?

✔ *Dit zijn de mogelijkheden:*

- *3 nulpunten: in de gevallen met twee extrema waarbij de extrema een verschillend teken hebben*
- *2 nulpunten: in de gevallen met twee extrema waarbij de grafiek raakt aan de horizontale as in een van de twee extrema*
- *1 nulpunt: in alle andere gevallen*

Merk op dat een derdegraadsfunctie dus altijd minstens één nulpunt heeft.

10 Hoe kun je het type van een derdegraadsfunctie bepalen als ze gegeven is door haar 'klassieke' voorschrift $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$?

✔ *Je zou dit voorschrift kunnen omzetten naar de vorm die we in het GeoGebrabestand gebruikt hebben* ($f(x) = a(x-p)^3 + qx + k$)*. Dan vind je dat de twee a's overeenkomen en dat* $p = -\frac{b}{3a}$ *en* $q = \frac{3ac-b^2}{3a}$*. Het kan echter eenvoudiger. De afgeleide is* $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$*, met discriminant* $4(b^2 - 3ac)$*. Om het type te kennen, volstaat het dus om het teken te kennen van a en van* $b^2 - 3ac$*. Beide aanpakken leiden natuurlijk tot hetzelfde resultaat. Je zou het getal* $b^2 - 3ac$ *de 'derdegraadsdiscriminant' kunnen noemen.*

BRONNEN

Deprez, J., Op de Beeck, R. en Roels, J. (1996). Machtsfuncties en veeltermfuncties. *Uitwiskeling 12/*3, 7-31.

Deprez, J. en Verbeeck, G. (2006). Logistische groei. *Uitwiskeling 22/*2, 14-48.

Sanderson, G. (s.d.). *Exponential growth and epidemics*, https://www.3blue1brown.com/?search=logistic&lesson=exponential-and-epidemics, geraadpleegd op 13/5/26.

Dikke Van Dale online woordenboek, geraadpleegd op 29/3/26 via bibliotheken KU Leuven

Quote Investigator (2019). https://quoteinvestigator.com/2019/07/11/exponential/, geraadpleegd op 14/5/26.

Roelens, M. (1992). Bespreking van Movshovitz-Hadar, N. en Schmukler, A. Infinitely many different quartic polynomial curves. *Uitwiskeling 9/*1, 60-63.

Roelens, M. (2006). Bespreking van Rolfs, J. Wie krumm ist die Banane? Krümmung und Kurven. *Uitwiskeling 22/*2, 49-52.