

Zandhopen

Gerd Hautekiet
Laure Ninove
Michel Roelens

INHOUD

1 Een ronde schijf en een vierkant als grondvlak 13
1.1 Ronde vlakke figuren als grondvlak 13
1.2 Een vierkante basis 15
2 Andere convexe veelhoeken als bodem 16
2.1 Een rechthoekig grondvlak . . . 17
2.2 Een driehoekig grondvlak 18
2.3 Een trapezium als grondvlak . . 20
2.4 Een willekeurig convex grondvlak 22
3 Zand en kegelsneden 24
4 Zand op andere figuren 31

Inleiding

In deze loep beschrijven we activiteiten waarbij een hoop zand (of zout of...) wordt gestrooid op verschillende vlakke figuren, uitgeknipt in karton. Er komt heel wat wiskunde bij kijken om te voorspellen of te verklaren wat er gebeurt. Enkele redactieleden van Uitwiskeling hebben deze activiteiten leren kennen op een workshop gegeven door Laure Ninove en enkele van haar collega's.

Laure is verantwoordelijk voor de educatieve masteropleiding wiskunde aan de Université Catholique de Louvain. Ze is ook één van de trekkers van de Groupe d'Enseignement Mathématique, opgericht door Nicolas Rouche in 1977. We vermelden Laure als mede-auteur omdat deze loep hoofdzakelijk op haar materiaal gebaseerd is.

Deze loep stond al in de steigers toen we ontdekten dat er onlangs over hetzelfde thema een artikel verschenen is in Wiskunde en Onderwijs, het tijdschrift van de Vlaamse Vereniging Wiskunde-Leraars (Dendoncker, 2025). Er is zeker een gedeeltelijke overlapping, wat niet verwonderlijk is want ook collega Dendoncker baseert zich op de workshop van onze Franstalige collega's.

Voor de paragrafen 1 en 2, waarin de grondvlakken van de zandhopen convexe veelhoeken zijn, volstaat wiskundekennis van de tweede graad. Als je het materiaal van deze loep in de tweede graad gebruikt, beperk je je dus tot paragrafen 1 en 2.

De paragrafen 3 en 4 steunen op kennis van kegelsneden. In de huidige leerplannen vind je kegelsneden bij 'suggesties voor het complementair gedeelte' in de derde graad. De activiteiten van de paragrafen 3 en 4 zijn bedoeld voor leerlingen die deze keuzeleerstof gekregen hebben. Voor deze leerlingen start je best met een verkorte versie van de paragrafen 1 en 2, om vooral aandacht te besteden aan de paragrafen 3 en 4.

Veel zandplezier!

1 Een ronde schijf en een vierkant als grondvlak

Iedereen heeft wel al eens met zand gespeeld in een zandbak of op het strand. Voor het bouwen van een mooi kasteel of sculptuur maak je meestal eerst een vormeloze hoop zand. Bij firma's van bouwmaterialen zie je daarentegen mooie kegelvormige hopen zand, kiezels ... liggen.

Wij gaan experimenteren op kleine schaal. Je hebt helemaal niet veel materiaal nodig: droog zand, enkele vlakke figuren in karton, bekertjes ... Tip: zand uit een zandbak of van het strand kun je makkelijk drogen door het uit te strooien op een bakplaat in een hete oven. Maar ook (strooi)zout of suiker voldoen. Met één pak kun je al behoorlijk experimenteren.

We zijn nu klaar voor een eerste experiment. Ik raad je aan om even te stoppen met lezen om het proefje in het echt uit te voeren: neem een glas of bokaaltje met een ronde onderkant, zout en een diep bord. Keer het glas om in het diepe bord, giet zachtjes zoveel mogelijk zout op de ronde bodem van het glas. Het overtollige zout loopt er af. De magie verschijnt in de vorm van een mooie kegel!

Je kunt het experiment klein houden voor thuis of in de klas maar op een opendeurdag kun je gerust buiten een XL-versie maken met zand, emmers... Laat je leerlingen en bezoekers maar experimenteren en morsen. Wiskunde en verwondering in de zandbak! Succes verzekerd!

We gaan in de lesactiviteiten in deze loep meestal op dezelfde manier te werk: we voeren een experiment uit, we observeren en vervolgens proberen we het experiment te verklaren met wiskunde. Maar soms kun je het resultaat van het experiment ook proberen te voorspellen en dan een experiment doen om het te verifiëren. Zo komen fouten aan het licht. Je krijgt een confrontatie tussen theorie en praktijk, wat niet zo dikwijls voorkomt in de wiskundeles.

Voor de eerste twee lesactiviteiten heb je het volgende materiaal nodig:

- enkele ronde glazen of plastieken potjes met verschillende diameters
- stevig papier of karton om vormen uit te knippen
- voldoende zand, zout, suiker, rijst, quinoia...
- plateaus of kranten, zeker handig als je het experiment binnen doet en je niet al te veel opruimwerk wil doen achteraf.

Je kunt uiteraard je leerlingen inschakelen om materiaal mee te brengen.

1.1 Ronde vlakke figuren als grondvlak

In een eerste lesactiviteit onderzoeken we het gedrag van zand op een ronde basisvorm. We voeren het begrip *rusthoek* in en laten de leerlingen onderzoeken van welke factoren deze rusthoek afhangt.

Dit is een activiteit die goed aansluit bij STEM-opdrachten: om te onderzoeken hoe de rusthoek afhangt van verschillende parameters, mag je maar één parameter tegelijk veranderen. Als je de invloed van het materiaal wilt onderzoeken, moet je de andere parameters zoals de vorm en de diameter van het grondvlak niet veranderen. Je kunt er ook voor kiezen om alles met zout te doen en sneller over te gaan naar de andere opdrachten. Je kunt het werk ook wat verdelen. Laat bijvoorbeeld sommige groepjes werken met zout, een ander groepje met zand ...

LESACTIVITEIT

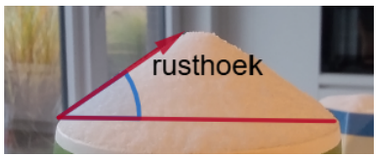
Een hoop zand op een ronde ondergrond

Giet zo veel mogelijk zand of zout op een ronde basisvorm, bijvoorbeeld een rond bierviltje of een omgekeerd plastieken bekertje. Je moet het niet al te voorzichtig doen: wat te veel is, glijdt er af. Daarom staat je basisvorm best een beetje hoger.

1 Welke vorm hebben de hopen?

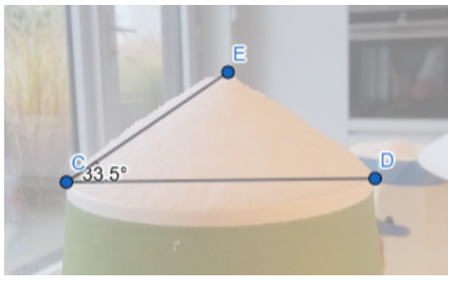
✔ *Het zijn allemaal kegels. Je zult merken dat deze kegels niet noodzakelijk perfect zijn: de top is niet juist één punt. Hier kun je uitleggen dat we werken met een wiskundig model dat vrij goed aansluit bij de realiteit maar er niet mee samenvalt.*

We definiëren een nieuw begrip: de *rusthoek* is de hoek tussen de beschrijvende rechten van de kegel en de horizontale richting. Die hoek is over de hele flank gelijk, dus niet enkel vanonder, zie de figuur hieronder.



2 Denk even na hoe je deze hoek zo nauwkeurig mogelijk kunt meten.

✔ *Uiteraard kun je een geodriehoek gebruiken. Dit is niet zo eenvoudig als het op het eerste zicht lijkt. Zodra je de hoop raakt, begint die te schuiven... Je zou ook een foto kunnen nemen van de kegel in vooraanzicht en daarop de rusthoek meten of je kunt de foto in GeoGebra plakken en daarop de rusthoek meten. Of je kunt de straal van het grondvlak en de hoogte van de kegel meten en hiermee de tangens van de rusthoek en dus ook de rusthoek zelf berekenen.*



3 Meet en noteer de rusthoeken voor hopen met dezelfde diameter maar met verschillend materiaal. Verdeel eventueel het werk.

✔ *Bijvoorbeeld:*

diameter	materiaal	rusthoek
10 cm	zand	32°
10 cm	rijst	25°
10 cm	zout	30°



4 Formuleer een besluit.

✔ *Als je de diameter van het grondvlak constant houdt, dan hangt de rusthoek af van het soort materiaal.*

5 Doe nu hetzelfde voor hopen van hetzelfde materiaal maar met verschillende diameters. Meet en noteer ook hier je meetresultaten in een tabel. Wat besluit je?

✔ *Bijvoorbeeld:*

materiaal	*diameter*	*rusthoek*
zand	*10 cm*	*32°*
zand	*15 cm*	*32°*
zand	*20 cm*	*32°*

De rusthoek hangt niet af van de diameter van het grondvlak.

De rusthoek is dus afhankelijk van het materiaal maar hangt niet af van de diameter van het grondvlak en dus de grootte van de hoop.

De verklaring hiervoor ligt in het samenspel tussen de zwaartekracht en de *cohesiekrachten* tussen de korrels in het materiaal. Deze aantrekkingskrachten hangen af van het materiaal. Als de helling van de flank een bepaalde hoek overschrijdt, wordt de zwaartekracht sterker dan de cohesiekrachten tussen de korrels. De korrels rollen dan naar beneden tot er een stabiele situatie ontstaat waarbij de flank overal dezelfde helling vertoont.

1.2 Een vierkante basis

We doen nu hetzelfde experiment op een vierkante ondergrond. Je kunt de leerlingen hiervoor een vierkant laten uitknippen in karton. Plaats dit vervolgens op een hoogte, bv. een bekertje, zodat het overbodige zand er goed kan aflopen. Laat de leerlingen op voorhand voorspellen wat er zal gebeuren, vooraleer ze het experiment uitvoeren.

Op het einde van de lesactiviteit kun je benadrukken dat elke korrel zand naar de dichtstbijzijnde rand van het grondvlak rolt. De korrel op de top kan echter niet beslissen waar hij naartoe moet en blijft dus liggen! De korrels op de ribben van de piramide bevinden zich even ver van twee zijden en blijven dus ook liggen. We komen later nog terug op dit inzicht.

LESACTIVITEIT

Een hoop zand op een vierkant

1 Wat denk je te krijgen als je zand giet op een vierkant plaatje? Doe een voorspelling en voer daarna pas het experiment uit.

✔ *Je krijgt een rechte piramide met het vierkant als grondvlak.*

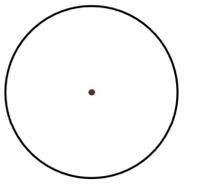


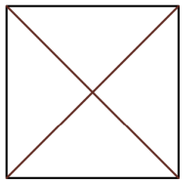
2 Meet opnieuw de rusthoek en vergelijk met de rusthoek bij de kegel.

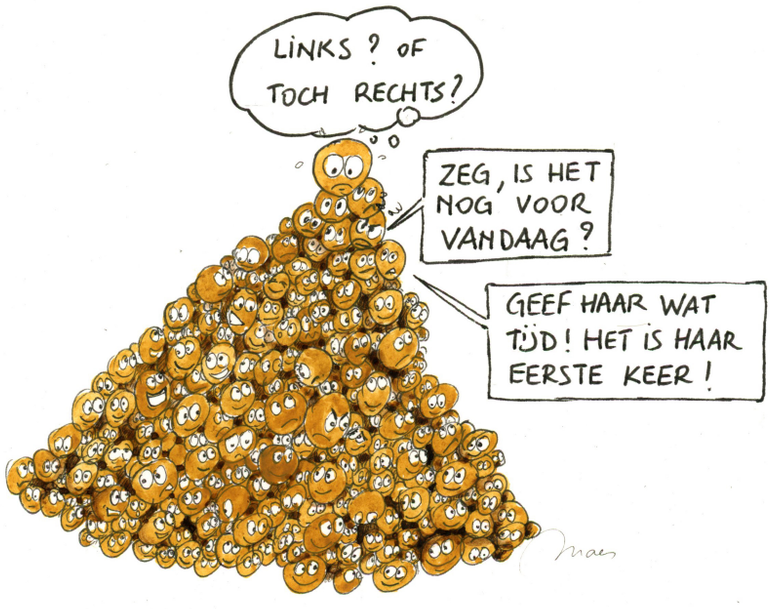
✔ *De rusthoek is dezelfde als bij de kegel, tenminste als je hetzelfde materiaal gebruikt hebt.*

3 Teken het bovenaanzicht van de zandhopen met een rond grondvlak en een vierkant grondvlak.

✔ *Bij het ronde grondvlak krijg je een cirkel met een puntje. Bij het vierkante grondvlak krijg je een vierkant met diagonalen. Het puntje staat voor de top van de kegel, de diagonalen staan voor de ribben van de piramide. Uit het bovenaanzicht kun je niet afleiden hoe groot de rusthoek is.*







2 Andere convexe veelhoeken als bodem

Wat als we de vorm van het grondvlak veranderen? Deze opdrachten geven aanleiding tot onderzoeksopdrachten die niet beginnen met 'toon aan dat ...' of 'bewijs dat ...' of 'verifieer dat ...' Ze passen in een strategie van verkennen, vermoeden, experimenteren, uitleggen en verklaren.

We starten met een rechthoekig grondvlak, dan gebruiken we een willekeurige driehoek, daarna een trapezium en ten slotte een willekeurige convexe veelhoek.

We gaan telkens op dezelfde manier te werk: schets het bovenaanzicht van de hoop die je verwacht voor je het experiment uitvoert, voer dan pas het experiment uit. Vergelijk ten slotte je schets met de echte hoop. Probeer te verklaren waarom je krijgt wat je krijgt!

We spreken in de volgende lesactiviteiten soms over de zandhoop in 3D en over het bovenaanzicht, dus de loodrechte projectie op het grondvlak. Het is een aandachtspunt om goed te zeggen of je werkt in het vlak (projectie) of in 3D (de zandberg).

2.1 Een rechthoekig grondvlak

LESACTIVITEIT

Een hoop zand op een rechthoekig grondvlak

1 Welke zandhoop verwacht je bij een rechthoekig grondvlak? Maak een schets van het te verwachten bovenaanzicht en voer daarna pas het experiment uit.

✔ *Je krijgt geen piramide meer. Er is niet één top maar een lijnstuk met hoogste punten. (In de bouw kom je dit soort ruimtelijk lichaam tegen in de vorm van een schilddak.)*

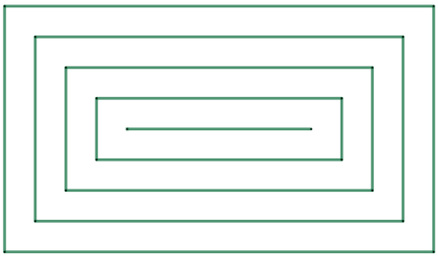
2 Wat kun je zeggen over de rusthoek?

✔ *Deze is weer constant en gelijk aan die bij de kegel en de piramide met vierkant grondvlak. De rusthoek hangt immers enkel af van het soort materiaal.*

Hoogtelijnen ken je uit de aardrijkskundeles: het zijn lijnen op een kaart die alle punten met een gelijke hoogte boven het zeeniveau verbinden.

3 Vul je tekening van het bovenaanzicht aan met enkele hoogtelijnen.

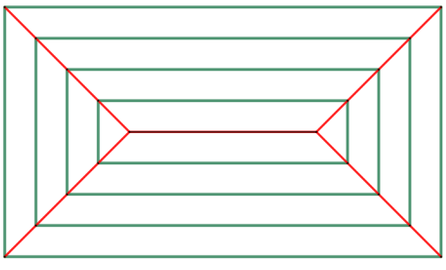
✔ *De hoogtelijnen zijn evenwijdig met de zijden van de rechthoek en de afstand tussen twee opeenvolgende hoogtelijnen is altijd dezelfde. Dit komt omdat de flanken overal even steil zijn.*



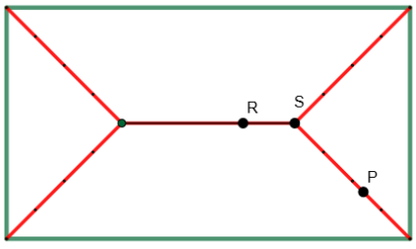
De hoogtelijn met de hoogste punten noemen we net zoals bij echte bergen de kamlijn. Ze is evenwijdig met de langste zijde van het grondvlak en staat loodrecht op de kortste zijde. Je ziet dat die in het midden ligt. Het kan zijn dat je die niet getekend hebt. Verderop zullen we proberen de positie van de kamlijn meetkundig te bepalen.

4 Verbind de hoekpunten van de hoogtelijnen.

✔ *Je krijgt volgende figuur.*



5 Aan welke eigenschap voldoen a) punten die op de kamlijn liggen zoals het punt R; b) punten op één van de schuine rechten die de hoekpunten van de rechthoekige hoogtelijnen verbinden zoals het punt P; c) punten die op zowel de kamlijn als op de twee schuine rechten liggen zoals het punt S?



✔ *a) Punten op de kamlijn bevinden zich even ver van de twee overstaande zijden, zowel in 3D als in het bovenaanzicht. Dit verklaart waarom de kamlijn in het bovenaanzicht in het midden tussen de twee lange randen ligt. b) Deze punten liggen even ver van twee opeenvolgende randen, ook weer zowel in 3D als in bovenaanzicht. Dit verklaart waarom deze lijnen een hoek van 45° maken met deze zijden. c) Deze twee punten bevinden zich even ver van drie opeenvolgende randen.*

In het bovenaanzicht is de *kamlijn* dus de meetkundige plaats van de punten die zich even ver bevinden van de twee dichtstbijzijnde zijden. De punten op het uiteinde van de kamlijn liggen op gelijke afstand van drie zijden. In 3D kunnen we de ribben daarom ook kamlijnen noemen.

2.2 Een driehoekig grondvlak

In dit onderdeel nemen we een willekeurige driehoek als grondvlak. We maken gebruik van de definitie van de bissectrice: het is de rechte door het hoekpunt die de hoek in twee gelijke delen verdeelt. We weten dat het ook de meetkundige plaats is van alle punten die op gelijke afstand liggen van de twee benen van de hoek.

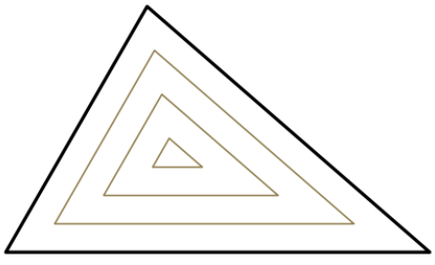
LESACTIVITEIT

Een hoop zand op een driehoekig grondvlak

1 Neem als volgende grondvlak een willekeurige driehoek. Schets eerst wat je verwacht als bovenaanzicht te verkrijgen, teken ook de vermoedelijke hoogtelijnen. Giet dan zoveel mogelijk zand op de omhoog geplaatste driehoek. Komt het experiment overeen met je schets? Is de rusthoek ook hier weer gelijk aan die in de vorige experimenten?

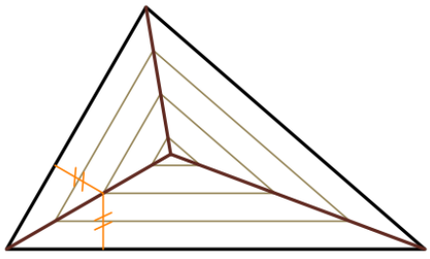
✔ *Je krijgt een piramide, zoals je in de volgende foto's ziet. Die is enkel afhankelijk van de vorm van het grondvlak en niet van waar je begint met zand te gieten. De rusthoek is weer dezelfde.*





2 Als je ook hier de hoekpunten van de hoogtelijnen verbindt, zie je speciale lijnen verschijnen op het bovenaanzicht. Welke lijnen zijn dit?

✔ *Het zijn de bissectrices van de hoeken gevormd door twee opeenvolgende zijden van de driehoek.*



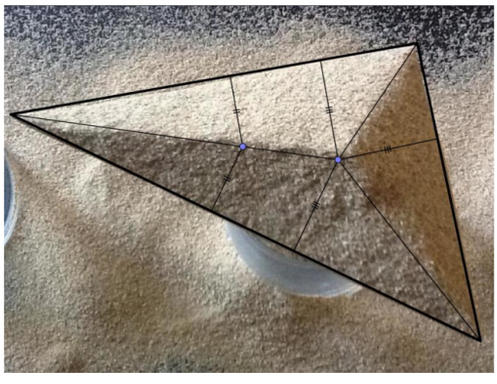
3 Geef hier een verklaring voor. Waarmee komen deze lijnen overeen in 3D?

✔ *De bissectrices zijn de meetkundige plaats van de punten die even ver liggen van twee opeenvolgende zijden van de driehoek. In 3D komen ze overeen met de ribben van de piramide. Korrels op de ribben van de piramide weten niet naar welke kant ze moeten vallen en blijven dus liggen.*

4 We weten dat in een vlak de drie bissectrices van een driehoek elkaar snijden in één punt. Wat weet je van dit snijpunt?

✔ *Omdat het snijpunt op elk van de bissectrices ligt, ligt het even ver van de drie zijden van de driehoek.*

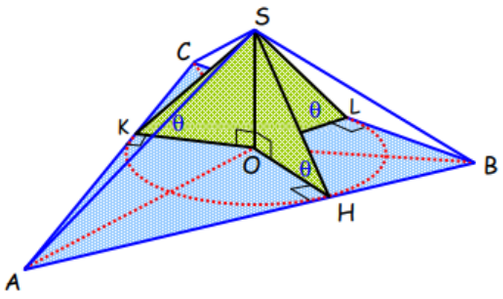
De bissectrices van het bovenaanzicht stellen in de zandhoop alle punten voor op de ribben van de piramide. Deze punten bevinden zich even ver van twee randen onderaan de zandhoop. De loodlijnen op de zijden geven de kortste weg aan voor een zandkorrel om naar beneden te rollen.



5 Wat betekent het snijpunt van de bissectrices uit het bovenaanzicht voor de zandhoop?

✔ *Dit snijpunt is de projectie van de top van de zandhoop. Deze top is het punt dat zich even ver van de drie randen van het grondvlak bevindt.*

Uit onze vorige experimenten blijkt dat de projecties van de ribben op het grondvlak de bissectrices van de hoeken van het bovenaanzicht zijn. We kunnen dit ook meetkundig bewijzen.



Figuur 1 *– De projectie van de ribben bij een driehoekig grondvlak.*

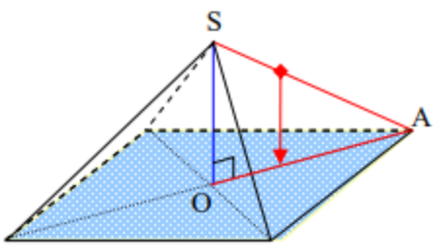
We bekijken een zandhoop op een willekeurige driehoek ABC. We noemen de top van de piramide S, zie figuur 1. De ribben van de piramide zijn bijgevolg $[SA]$, $[SB]$ en $[SC]$.

Stel O de loodrechte projectie van de top S op het grondvlak ABC. Als een zandkorrel uit S naar beneden zou rollen, komt hij in H op $[AB]$ of in K op $[AC]$ of in L op $[BC]$ toe. De driehoeken SOL, SOK en SOH staan loodrecht op het grondvlak. Ze hebben allen dezelfde rusthoek in respectievelijk L, K en H en een rechte hoek in O. De zijde $[OS]$ is gemeenschappelijk. Door het congruentiekenmerk ZHH (zijde-hoek-hoek) zijn deze drie driehoeken dus congruent. Bijgevolg is ook $|OH| = |OK|$.

Dat wil zeggen dat O op de bissectrice van $\hat{A}$ ligt. Hetzelfde geldt voor $|OL|$ en $|OK|$. Dit wil dus ook zeggen dat O het snijpunt van de drie bissectrices is en het middelpunt van de ingeschreven cirkel van het grondvlak.

De projectie van $[AS]$ is dus inderdaad de bissectrice $[AO]$. Ons vermoeden is hiermee bewezen.

Als we terugkijken naar de hopen op een vierkant, zie figuur 2, of een rechthoek, kunnen we een analoog bewijs geven.



Figuur 2 *– De projectie van de ribbe $[AS]$ is de bissectrice van hoek A.*

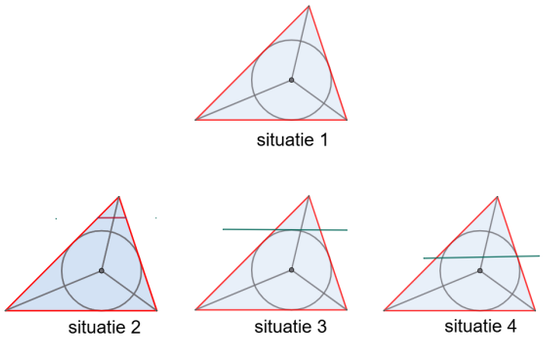
Kunnen we deze redenering veralgemenen naar elke convexe veelhoek? Dat onderzoeken we in volgende paragraaf.

2.3 Een trapezium als grondvlak

Het volgende stuk is niet helemaal uitgeschreven als lesactiviteit maar het is wel de bedoeling om dit op een onderzoekende manier aan te brengen te zoals in de vorige paragrafen. Dit kan in groepjes of via een onderwijsleergesprek omdat het wat moeilijker wordt. Het interessante van deze situatie is niet zozeer het eindresultaat maar vooral de zoektocht ernaartoe.

We bekijken enkele trapezia. Een trapezium is een vierhoek met twee evenwijdige zijden. We vertrekken van een driehoek. Teken de bissectrices en de ingeschreven cirkel. Doe dit in viervoud.

Knip nu van drie driehoeken een stuk volgens een lijn evenwijdig met de basis van de driehoek zoals in figuur 3 is aangegeven: boven de ingeschreven cirkel (situatie 2), rakend aan de ingeschreven cirkel (situatie 3) en dwars door de ingeschreven cirkel (situatie 4).



Figuur 3 *– Een driehoek en drie verschillende soorten trapezia*

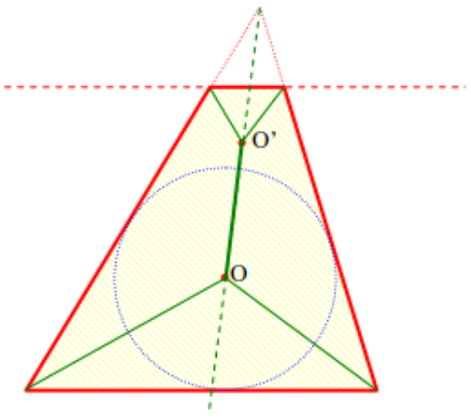
Teken nu ook nog de bissectrices van de twee nieuw verschenen hoeken van de trapezia.

Voor je het experiment uitvoert, kun je uiteraard proberen te voorspellen welke zandhoop en welk bovenaanzicht je zult krijgen. Het loont echt de moeite om dit zelf verder uit te zoeken.

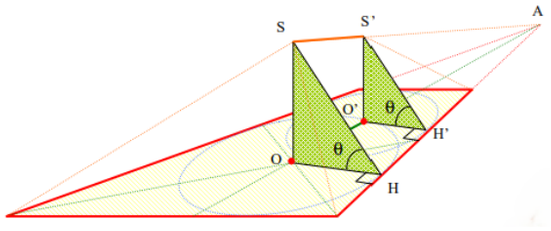
Als je zand giet op de volledige driehoek (situatie 1), zul je uiteraard een piramide krijgen. We bekijken ook situatie 2 en 4 in detail; situatie 3 laten we aan de lezer.

In de tweede situatie zijn de bissectrices niet concurrent. Er zijn twee snijpunten van telkens twee bissectrices, de punten O en O', zie figuur 4. De punten O en O' liggen op de bissectrice van de

afgesneden hoek van de driehoek. Deze punten zijn de projecties van S en S', de eindpunten van de kamlijn.



Figuur 4 *– Projectie van situatie 2*



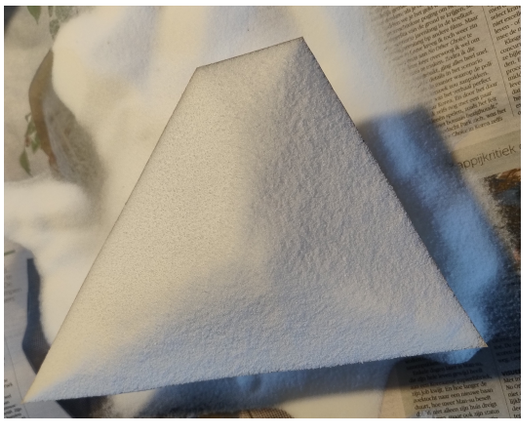
Figuur 5 *– De 3D-versie van situatie 2*

In de 3D-tekening zien we twee rechthoekige driehoeken HSO en $H'S'O'$ die eenzelfde rusthoek hebben en dus gelijkvormig zijn. We zien dat $|OS| = |OH|\cdot\tan\theta$ en $|O'S'| = |O'H'|\cdot\tan\theta$ maar $|OH| > |O'H'|$, dus $|OS| > |O'S'|$.

Het lijnstuk [SS'] loopt dus niet horizontaal. In het bovenaanzicht kun je dit zien aan het feit dat O' dichter bij de rand ligt dan O. Verifieer het met het experiment.

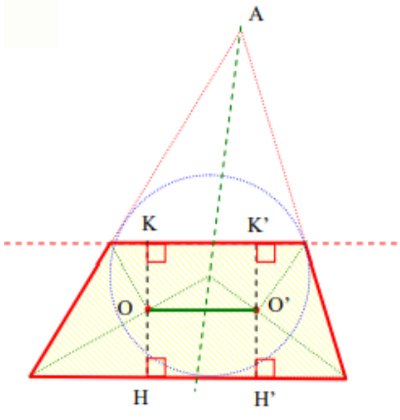
En meer zelfs: $|OS|-|O'S'| = (|OH|-|O'H'|)\cdot\tan\theta$.

Als we de kniplijn in onze oorspronkelijke driehoek helemaal zouden opschuiven tot in het hoekpunt, dan zou $|O'H'|$ gelijk zijn aan 0, dus de helling van $[SS']$ zou dezelfde zijn als die van $[SA]$. Als we $[SS']$ verlengen, zou die door de top A van de driehoek lopen die we hebben afgeknipt.

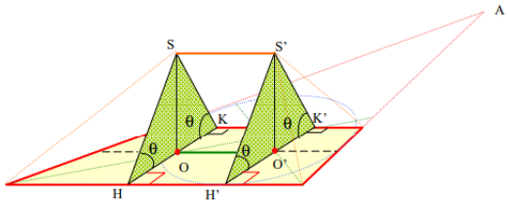


Figuur 6 *– Situatie 2*

In situatie 4 hebben we ook de vier bissectrices van de hoeken van het trapezium getekend. Nu snijdt telkens één van de oude bissectrices met één van de nieuwe bissectrices. Dit geeft weer twee punten O en O'. Het lijnstuk $[OO']$ dat deze twee punten verbindt, is evenwijdig met de twee evenwijdige zijden van het trapezium. O en O' zijn de projecties op het grondvlak van de toppen S en S'.



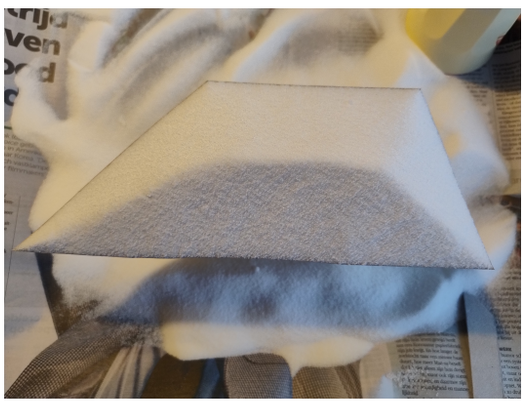
Figuur 7 *– Projectie van situatie 4*



Figuur 8 *– 3D-tekening van situatie 4*

In de 3D-voorstelling zijn er weer twee driehoeken geplaatst, HSO en $H'S'O'$, die twee keer dezelfde rusthoek hebben met het grondvlak. We vinden: $|OS| = |OH|\cdot\tan\theta$ en $|O'S'| = |O'H'|\cdot\tan\theta$ maar nu is $|OH| = |O'H'|$ en dus $|OS| = |O'S'|$.

Dus $[SS'] \parallel [HH'] \parallel [KK']$. De kamlijn is evenwijdig met de evenwijdige zijden van het trapezium. Verifieer weer met het experiment.

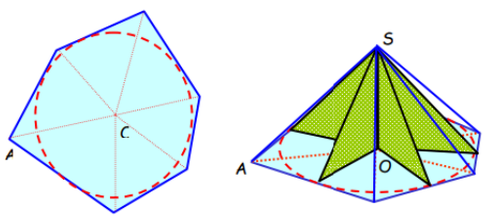


***Figuur 9** – Situatie 4*

2.4 Een willekeurig convex grondvlak

Kunnen we dit nog verder veralgemenen? Als het veelhoekig grondvlak concurrente bissectrices heeft, zoals bij een driehoek altijd het geval is, krijg je zeker een piramide. Als de bissectrices van het grondvlak niet concurrent zijn, zoals bij de rechthoek, krijg je geen piramide.

Dit kun je ook omgekeerd toepassen: om een piramide te krijgen, volstaat het om een cirkel te tekenen en daarna een veelhoek waarvan de zijden raken aan de cirkel. Als je deze uitknipt en er zand op giet, verkrijg je altijd een piramide!



***Figuur 10** – Een zeszijdige piramide*

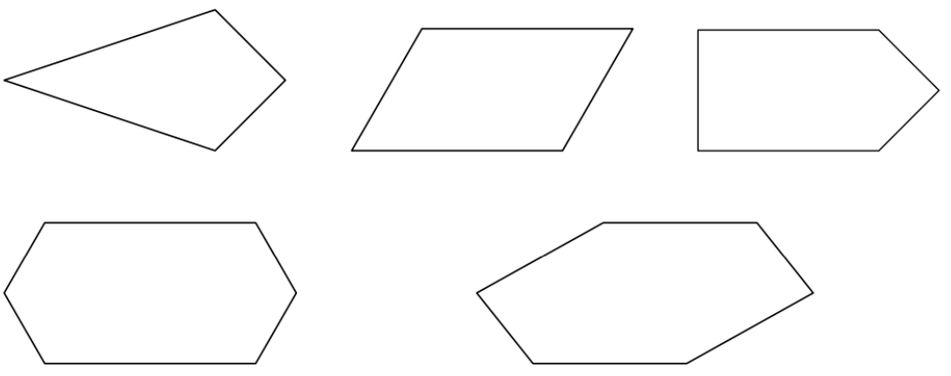
Met wat we nu weten, kunnen we vertrekkend van elk convex grondvlak, voorspellen welke vorm de zandhoop zal aannemen. Het volstaat de bissectrices te tekenen van alle hoeken van het veelvlak. We hebben de hoogtelijnen uit de 3D-figuur niet nodig. Als slot van deze paragraaf laten we de leerlingen voor enkele willekeurige convexe grondvlakken het bovenaanzicht construeren en daarna met een experiment hun voorspelling controleren.



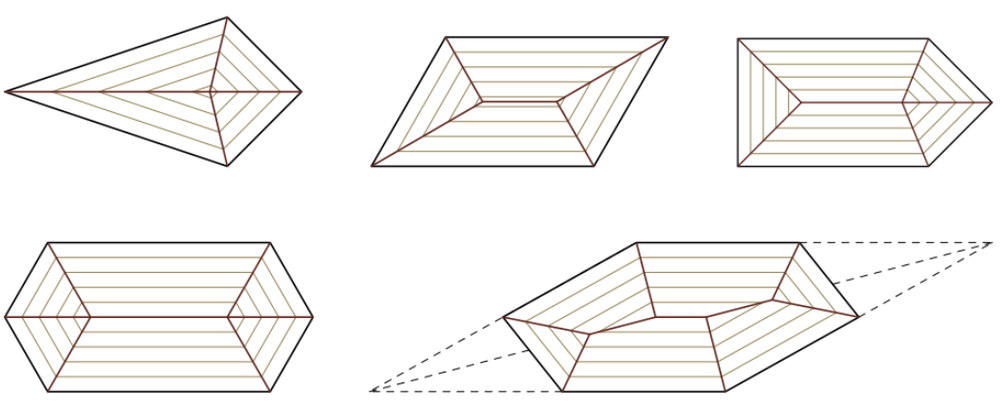
LESACTIVITEIT

Een oefening

1 Construeer door gebruik te maken van bissectrices de bovenaanzichten van de zandhopen met volgende grondvlakken. Je kunt hiervoor al of niet GeoGebra gebruiken. Verifieer daarna met een experiment.



✔ *Zie hieronder de oplossingen. De aardrijkskundige hoogtelijnen uit de 3D-figuren zijn erbij getekend, maar ze zijn niet noodzakelijk om de oefening op te lossen.*



3 Zand en kegelsneden

Vanaf deze paragraaf hebben we leerlingen op het oog die vertrouwd zijn met kegelsneden als meetkundige plaatsen en als vlakke doorsneden van een kegel. Dit wordt vaak als uitbreiding behandeld, zeker bij leerlingen met meer dan 6 uur wiskunde per week.

We vatten eerst voor de lezer samen wat deze voorkennis inhoudt. Dit wil niet zeggen dat je die moet aanbrengen net voor deze zandopdrachten. Het zou een beetje artificieel zijn en de ontdekkingen te voorspelbaar maken.

Het belangrijke inzicht van de voorkennis over kegelsneden is dat de ellipsen, hyperbolen en parabolen die je in de ruimte vindt door een kegel te snijden met een vlak, dezelfde zijn als de ellipsen, hyperbolen en parabolen als meetkundige plaatsen in het vlak. Het bewijs daarvan, met de fameuze bollen van de Belg Germinal Pierre Dandelin (19de eeuw), vind je op veel plaatsen terug, bijvoorbeeld in Levrie en Penne, 2015.

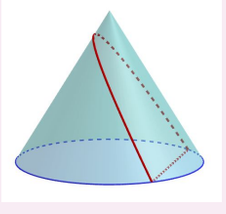
Herhaling • Ellips, hyperbool, parabool als vlakke doorsneden van een kegel

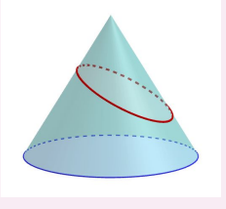
Een kegel zoals we die hier voor ogen hebben, is onbegrensd aan beide kanten van de top. Je hebt een cirkel en een top recht boven het middelpunt van die cirkel. De kegel ontstaat door een rechte te wentelen die de top verbindt met een punt van de cirkel. De as waarrond we wentelen, gaat door de top en het middelpunt van de cirkel. De (onbegrensde) rechten die de top verbinden met punten van de cirkel noemen we de *beschrijvenden* van de kegel. Buiten de wiskunde zou men zeggen: twee onbegrensde kegels met een zelfde top, waarbij de ene kopstand (of liever 'topstand') doet op de top van de andere. Voor wiskundigen is dat één kegel.

De tekeningen hiernaast zijn natuurlijk wel begrensd. Voor de parabool en de ellips hebben we enkel het stuk aan één kant van de top nodig.

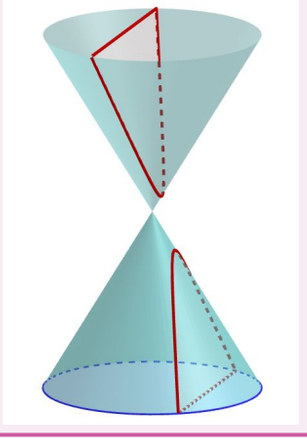
Als je een kegel snijdt met een vlak (niet door de top) dat even steil is als de beschrijvenden (anders gezegd: met een vlak evenwijdig met één beschrijvende), dan krijg je als doorsnede een *parabool* (figuur links).

Als je een kegel snijdt met een vlak (niet door de top) dat minder steil is dan de beschrijvenden, dan krijg je als doorsnede een *ellips* (figuur rechts). Een speciaal geval: als het vlak evenwijdig is met het vlak van de cirkel, krijg je als doorsnede een cirkel, en dat is een speciale ellips.





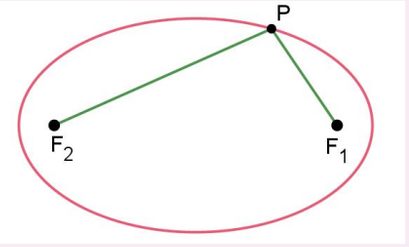
Als je de kegel snijdt met een vlak (nog steeds niet door de top) dat steiler is dan de beschrijvenden, dan krijg je een *hyperbool*. Dit vlak zal ook het stuk van de kegel 'boven' de top snijden. De hyperbool bestaat uit twee takken. Enkel voor dit geval hebben we het stuk van de kegel 'boven' de top erbij getekend.



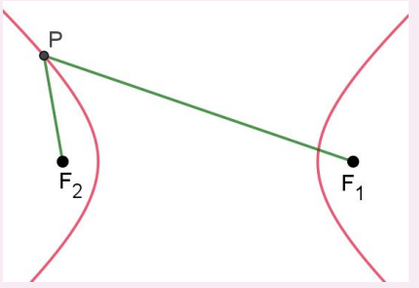
Herhaling • Ellips, hyperbool, parabool als meetkundige plaatsen

Gegeven twee vaste punten F_1 en F_2 en een constant positief getal a.

De *ellips* met brandpunten F_1 en F_2 en halve grote as a is de meetkundige plaats van een veranderlijk punt P waarvoor $|PF_1| + |PF_2|$ gelijk is aan $2a$. Het verband tussen de halve grote as a, de halve kleine as b en de halve afstand tussen de brandpunten c bij een ellips is gegeven door: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

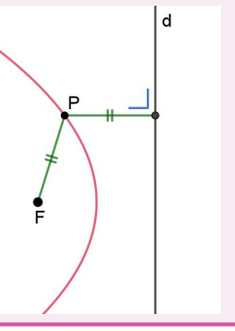


De *hyperbool* met brandpunten F_1 en F_2 en halve 'hoofdas' a is de meetkundige plaats van een veranderlijk punt P waarvoor de absolute waarde van $|PF_1| - |PF_2|$ gelijk is aan $2a$.



Gegeven een vast punt F en een rechte d niet door F.

De *parabool* met brandpunt F en richtlijn d is de meetkundige plaats van een veranderlijk punt P waarvoor $|PF| = |Pd|$.



Nu komen de zandopdrachten. Net als in de vorige paragrafen, beschikken de leerlingen over genoeg droog zand en uitgeknipte kartonnen figuren waarop de zandhopen moeten rusten. En plastiek bekertjes om de figuren op een bepaalde hoogte te kunnen plaatsen. Net als in de vorige paragrafen, doen we vooral vlakke meetkunde in het bovenaanzicht, of, wat op hetzelfde neerkomt, in de loodrechte projectie op de kartonnen basis van de zandhoop. Af en toe verwijzen we naar rollende zandkorrels in de ruimte. We schakelen vlot over van 2D naar 3D.

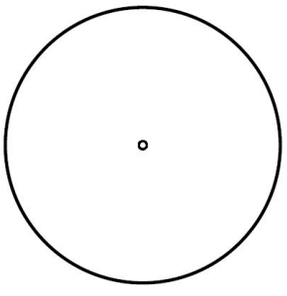
In de vorige opdrachten hebben de leerlingen vastgesteld dat overtollige zandkorrels wegrollen naar het dichtstbijzijnde punt van de rand van de kartonnen figuur. Zandkorrels die evenver liggen van twee of meer randpunten "kunnen niet kiezen" en vormen een 'kamlijn' of een top (snijpunt van kamlijnen). Het zijn de bovenaanzichten van de kamlijnen die leerlingen moeten voorspellen en verklaren. We gebruiken vanaf nu het woord kamlijn nogal ruim: ook bv. de opstaande ribben van de piramidale zandhoop op een kartonnen vierkant noemen we kamlijnen, want ze bestaan uit korrels die niet kunnen kiezen naar welke zijde ze rollen ... Bovendien zullen we soms kamlijn schrijven wanneer we het bovenaanzicht van de kamlijn bedoelen.

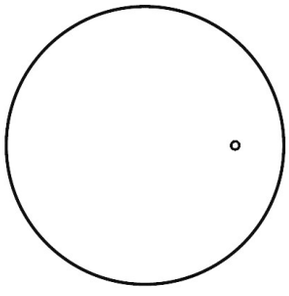
LESACTIVITEIT

Zand op een schijf met een gat in

Het grondvlak waarop we zand willen gieten, is een cirkelschijf met een gaatje in.

Je ziet hieronder twee cirkelschijven: één met een gat in het midden, één met een gedecentreerd gat. Het gat is klein en in de redeneringen zullen we het als een punt behandelen. Maar in werkelijkheid mag het gat ook niet *te* klein zijn, want de zandkorrels moeten erdoor kunnen.



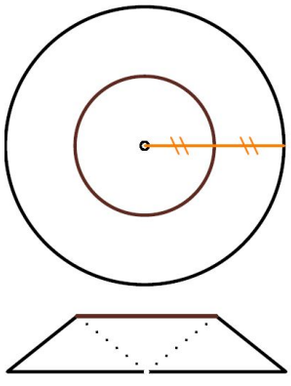


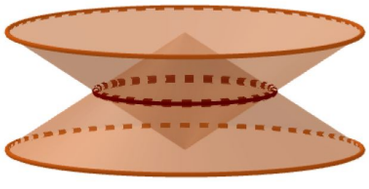
1 Teken op deze bovenaanzichten telkens de kamlijn.

2 Giet dan zand op het kartonnen exemplaar om dit te verifiëren.

3 Verklaar ten slotte de vorm van de kamlijn.

✔ *Bij het centrale gat is het niet moeilijk: het bovenaanzicht van de kamlijn is een concentrische cirkel met als straal de helft van de straal van de gegeven schijf. Immers, deze cirkel bestaat uit de punten op gelijke afstand tot het gat en de rand. Dit is ook in 3D te verklaren: in het midden van de kegel heb je een kegelvormige uitsparing met dezelfde rusthoek. Hieronder zie je het bovenaanzicht en het vooraanzicht, en ernaast de kegel met een tweede, gelijke kegel maar op zijn kop (of liever: op zijn top). Deze tweede kegel bepaalt de uitsparing in de eerste kegel.*





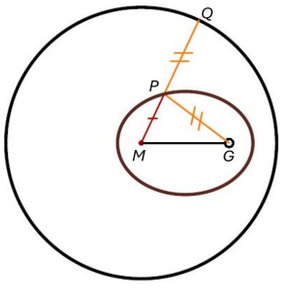
Bij de cirkelschijf met een gedecentreerd gat is de kamlijn in bovenaanzicht een ellips. Als het gat dicht bij het middelpunt ligt, zou je op het eerste gezicht nog kunnen denken dat het een cirkel is.

Maar laten we redeneren: een willekeurig punt P van de kamlijn ligt even ver van het gat G als van de rand van de schijf. Die afstand |PQ| tot de rand van de schijf (zie figuur hieronder) wordt

loodrecht op die rand gemeten, dus op een straal van de cirkel. Bijgevolg is

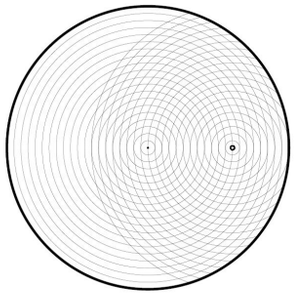
$$|PM| + |PG| = |PM| + |PQ| = |MQ| = r$$

waarbij r de straal is van de cirkel.

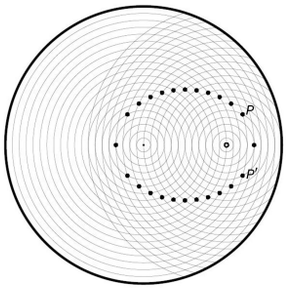


Dus is de som $|PM| + |PG|$ constant. De punten P van de kamlijn vormen dus een ellips met als brandpunten G en M.

4 Je kunt, bij het gedecentreerde gat, ook redeneren met hoogtelijnen. Je ziet hier de cirkelschijf met het gat, en concentrische cirkels rond het middelpunt en rond het gat. Construeer met deze figuur de kamlijn en leg uit.



✔ *Je kunt in het vlak redeneren: de punten die we aanduiden moeten op gelijke afstand liggen van het gat als van de rand van de cirkel. Bijvoorbeeld: 5 eenheden van het gat en 5 eenheden van de rand, waarbij deze eenheden de afstanden zijn tussen de concentrische cirkels. Dit geeft de punten P en P'. Analoog voor andere eenhedenaantallen.*



Je kunt ook in 3D redeneren: de cirkels zijn hoogtelijnen en je snijdt de cirkels die even hoog zijn. De cirkels rond het gat beginnen in het gat met hoogte nul (cf. de kegel op zijn top); de cirkels rond het middelpunt beginnen aan de rand met hoogte nul (cf. de gewone kegel).

5 Het gat was in de vorige opgaven heel klein en we behandelden het als een punt. Wat verandert er als het (gedecentreerde) gat een grotere cirkel(schijf) is?

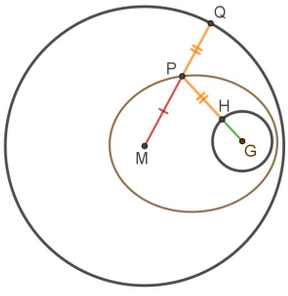
✔ *Het bovenaanzicht van de kamlijn is opnieuw een ellips. De brandpunten zijn het middelpunt van de cirkel en het middelpunt van het gat. De som van de afstanden tot deze twee punten is weer*

constant. Deze constante is niet meer de straal van de cirkel, maar de som van de straal van de cirkel en die van het gat.

Laten we dit even aantonen. Een punt P van de kamlijn (in bovenaanzicht) ligt even ver van de rand van de grote cirkel als van de rand van het ronde gat. Met de notaties van de figuur hieronder: $|PQ| = |PH|$. De som van de afstanden van P tot het middelpunt M en het middelpunt G van het gat is bijgevolg:

$$|PM| + |PG| = |PM| + |PH| + |HG| = |PM| + |PQ| + |HG| = |MQ| + |HG| = r + s$$

waarbij r de straal is van de grote cirkel en s de straal van het gat. Deze som is dus constant en P beschrijft een ellips.





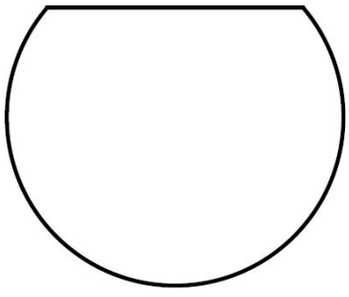


In de vorige lesactiviteit kwamen we een kamlijn uit in de vorm van een ellips. Wellicht vraag je je af (of vragen je leerlingen zich af) of je ook een parabool en een hyperbool kunt verkrijgen.

In de volgende opgave duikt alvast een (stuk) parabool op.

LESACTIVITEIT

Zand op een cirkelsegment



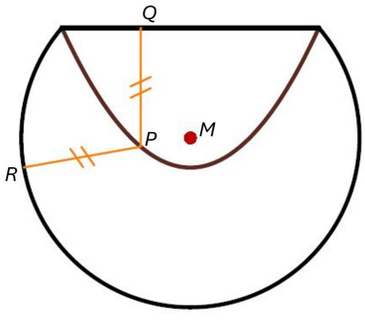
We nemen hier als basis voor een zandhoop een deel van een cirkelschijf aan één kant van een koorde. Deze figuur noemen we een *cirkelsegment*. Het weggesneden stuk is ook een cirkelsegment. Wij nemen hier een 'groot' cirkelsegment — dit wil zeggen het stuk met het middelpunt erop — maar het gaat even goed met een 'klein' cirkelsegment.

1 Teken (het bovenaanzicht van) de kamlijn die je verwacht.

2 Giet dan zand op het kartonnen exemplaar om dit te verifiëren.

3 Waar voldoen de punten van de kamlijn aan?

✔ *Voor elk punt P van de kamlijn is de afstand $|PQ|$ tot de koorde gelijk aan de afstand $|PR|$ tot de rand van de cirkel (zie figuur hieronder).*



Je vermoedt waarschijnlijk dat (het bovenaanzicht van) de kamlijn een parabool is. In de volgende opgaven ga je dit bewijzen.

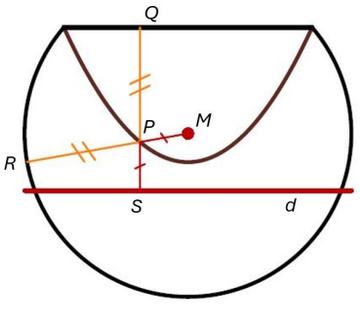
4 Om te bewijzen dat de kamlijn een parabool is, heb je een brandpunt en een richtlijn nodig. Het brandpunt zal het middelpunt M van de cirkel zijn. Waar ongeveer moet de richtlijn d liggen? Toon dit met je vinger.

✔ *Leerlingen tonen een rechte evenwijdig met de koorde (vanwege de symmetrie) en 'onder' de kamlijn. De precieze plaats van de richtlijn komt in de volgende vraag aan bod.*

5 Bewijs door een geschikte keuze van de richtlijn dat de kamlijn inderdaad een parabool is.

✔ *Neem een willekeurig punt P van de kamlijn en noem r de straal van de cirkel. We willen de richtlijn d zo bepalen, dat de afstand $|PM|$ tot het brandpunt gelijk is aan de afstand $|PS|$ tot de rechte d. We weten dat $|PR| = |PQ|$ (zie vraag 3) en dus:*

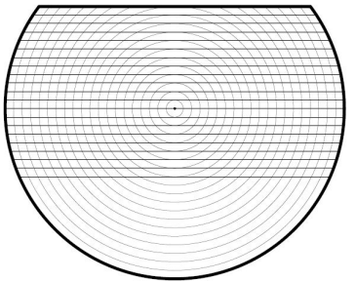
$$|PM| = r - |PR| = r - |PQ|.$$



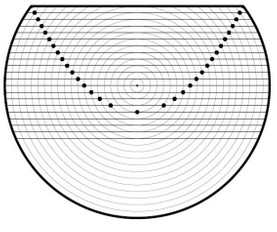
Dus, om te verkrijgen dat $|PM| = |PS|$ (met de benamingen van de figuur) moeten we d op afstand r van de koorde nemen. En dan geldt inderdaad

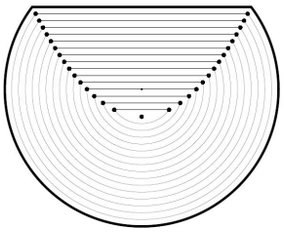
$$|PM| = r - |PR| = r - |PQ| = |QS| - |PQ| = |PS|.$$

6 Construeer de kamlijn met hoogtelijnen.



✔ *Zie hieronder. Op de eerste figuur worden de snijpunten van de overeenkomstige hoogtelijnen geconstrueerd. De rechte hoogtelijnen horen bij een schuin vlak dat volgens de rusthoek afloopt naar de koorde van het grondvlak. De cirkelvormige hoogtelijnen horen bij de kegel die je zou hebben als de basis de volledige cirkelschijf zou zijn. De kamlijn is de doorsnede van de kegel met dat schuine vlak (even schuin als de beschrijvenden van de kegel). Dit is nog een extra manier om in te zien dat het een stuk parabool is. De tweede figuur bevat de uiteindelijke hoogtelijnen van de zandhoop.*

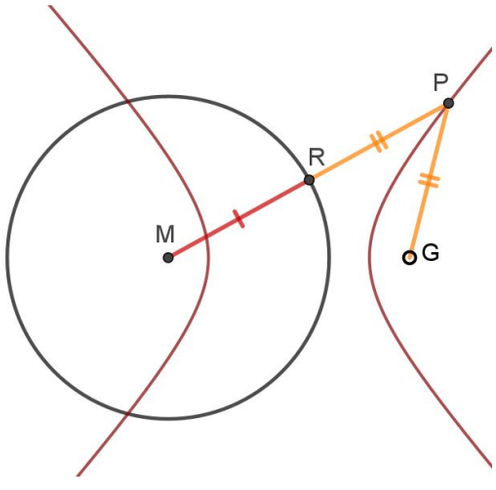






Na deze lesactiviteit kun je aan de leerlingen vragen om met zand een (stuk) hyperbool te maken. Dit lukt met een groot cirkelvormig gat in een (nog groter) stuk karton en een (piepklein) gat buiten die cirkel. Na de vorige opgaven is het niet zo moeilijk om aan te tonen dat punten van de kamlijn een constant verschil van afstanden hebben tot het gaatje en het midden van de cirkelvormige uitsparing.

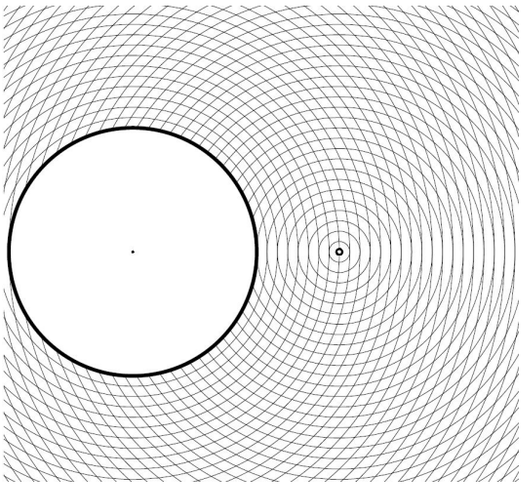
Op de figuur hieronder zie je een groot cirkelvormig gat met middelpunt M en straal r, een piepklein gaatje G en een punt P van de kamlijn, even ver van het gaatje als van het cirkelvormig gat: $|PG| = |PR|$. Omdat $|PM| - |PG| = r$, vormt de kamlijn een hyperbooltak met brandpunten M en G en met hoofdas (afstand tussen de toppen) r. De andere tak van de hyperbool is erbij getekend, maar is hier geen kamlijn.



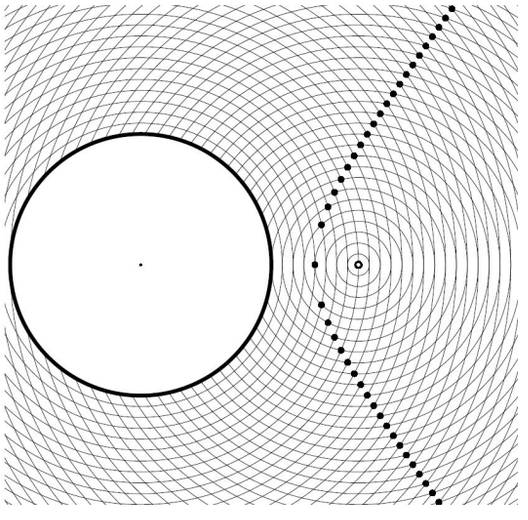
Figuur 11 *– Hyperbooltak als kamlijn*

In de praktijk is het niet zo gemakkelijk om het met zand te tonen. Immers, het stuk karton moet groot genoeg zijn om te vermijden dat de randen van het stuk karton, samen met het ronde gat of het gaatje, extra kamlijnen creëren die in de weg zitten.

Je kunt voor de hyperbool eventueel ook hoogtelijnen laten gebruiken. Hieronder zie je hoogtelijnen voor en na het aanbrengen van de snijpunten van de hoogtelijnen op gelijke hoogte.



Figuur 12 *– Hoogtelijnen voor zandhoop met hyperbool als kamlijn*



Figuur 13 *– De hyperbooltak geconstrueerd met hoogtelijnen*

4 Zand op andere figuren

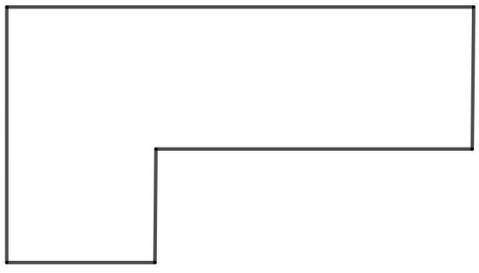
In paragraaf 2 kwamen zandhopen op convexe veelhoeken aan bod. Niet-convexe veelhoeken zijn meteen een stuk ingewikkelder: de kamlijn is niet meer te bepalen enkel en alleen met bissectrices. Er komen ook kegelsneden aan te pas.

In de volgende lesactiviteit bekijken we een zandhoop op een L-vormige zeshoek.

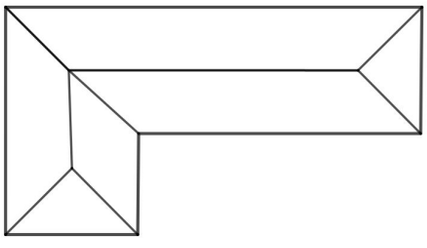
LESACTIVITEIT

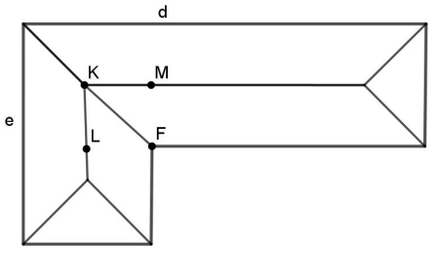
Zand op een niet-convexe veelhoek

1 Teken de kamlijnen die je verwacht als je op deze figuur zand zou gieten.



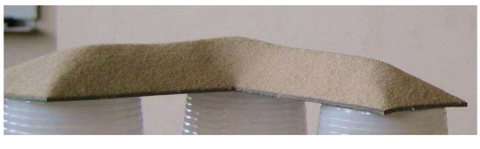
✔ *We verwachten dat veel leerlingen de volgende lijnen zullen tekenen.*





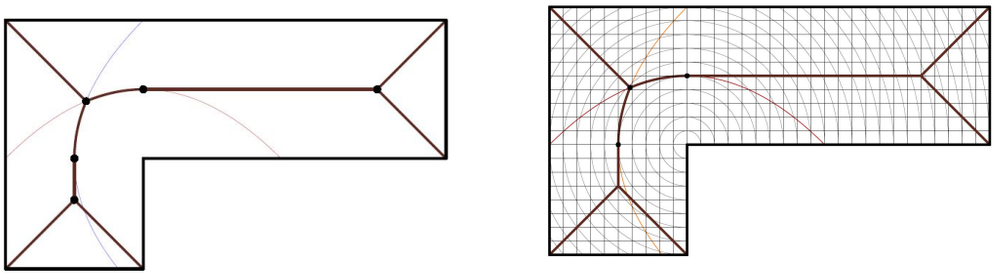
Als ze dit met zand verifiëren, zien ze dat de kamlijn niet alleen uit rechte lijnstukken bestaat. In zijaanzicht zien ze dat de zandhoop in de bocht ook wat hoger komt. Dit brengt hen ertoe om er grondiger over na te denken.





De stukken van de kamlijn kunnen niet allemaal rechtlijnig zijn zoals in de eerste poging hierboven. De punten tussen K en M (M zelf niet meegerekend) liggen dichter bij rand d dan bij punt F. Het lijnstuk $[KM]$ moet vervangen worden door punten even ver van punt F als van rand d. Dit wordt dus een stuk parabool met brandpunt F en richtlijn d. Analoog moet $[KL]$ vervangen worden door een stuk parabool met brandpunt F en richtlijn e. Verder moet het lijnstuk $[KF]$ weggelaten worden. Dit is geen kamlijn. Zandkorrels die boven $[KF]$ liggen, twijfelen niet waar ze naartoe moeten rollen. Ze rollen naar punt F, het dichtste punt van de rand.

Op de volgende pagina vind je de juiste oplossing.



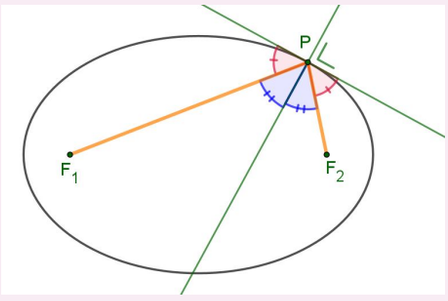
Als je met hoogtelijnen werkt, zie je dat de zandhoop bij het snijpunt van de twee paraboolstukken, inderdaad iets hoger ligt dan de rechte kamlijnen.

In Eggermont en Roelens (2004) hadden we het over kegelsneden als 'conflictlijnen', grenzen tussen territoriale wateren. Deze visie op kegelsneden komt eigenlijk op hetzelfde neer als de kegelsneden die we hier ontmoeten, als bovenaanzichten van kamlijnen bij zandhopen.

In de lesactiviteit hieronder keren we het om: na kamlijnen die ellipsen of andere kegelsneden zijn, nemen we nu een ellips voor het kartonnen grondvlak dat we uitknippen. Voor deze lesactiviteit is nog wat meer voorkennis nodig: de weerkaatsingseigenschap in een ellips en de bissectricestelling in een driehoek.

Herhaling • Weerkaatsing in een ellips

Een (licht)straal die in één brandpunt vertrekt, wordt weerkaatst naar het andere brandpunt. Weerkaatsing gebeurt met gelijke hoeken ten opzichte van de raaklijn en dus ook gelijke hoeken ten opzichte van de 'normaal' (dit is de loodlijn op de raaklijn). Dit betekent dat de normaal in een punt P van de ellips de bissectrice is van de hoek $F_1\hat{P}F_2$ (zie figuur).

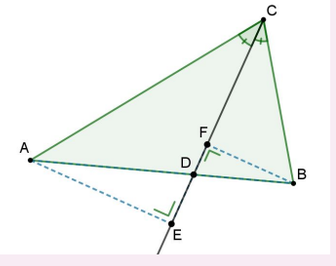


Herhaling • De bissectricestelling

In een willekeurige driehoek: de bissectrice van een hoek verdeelt de overstaande zijde in stukken die zich verhouden zoals de aanliggende zijden.

Op de figuur hieronder: de bissectrice van $\hat{C}$ verdeelt de zijde $[AB]$ in stukken $[AD]$ en $[DB]$ op zo'n manier dat

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$



Je kunt loodlijnen op de bissectrice tekenen (zie figuur) om gelijkvormige driehoeken te gebruiken. Dan is ΔADE gelijkvormig met ΔBDF zodat

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|BF|}$$

en ΔACE is gelijkvormig met ΔBCF, zodat

$$\frac{|AE|}{|BF|} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

Leerlingen die kegelsneden bestudeerd hebben, hebben waarschijnlijk de mooie weerkaatsingseigenschappen gezien. Hier zijn ook tal van mooie toepassingen van: een 'fluisterzaal', een niersteenverbrijzelaar, een schotelantenne, enz. Hier, voor onze zandhoop op een ellipsvormig grondvlak, hebben we enkel de weerkaatsingseigenschap van de ellips nodig. Bovendien hebben die leerlingen in hun derde jaar mogelijk zelf de bissectricestelling bewezen.

Beschouw deze lesactiviteit nu niet als een werktekst die je uitdeelt aan de leerlingen. Deze opdracht is wat moeilijker. De meeste leerlingen zullen er niet aan denken om de weerkaatsingseigenschap in de ellips en de bissectrice-eigenschap in een driehoek te gebruiken. De vragen in de lesactiviteit zijn tips die je aan de leerlingen geeft, bij een klassikale zoektocht. De antwoorden die erbij staan bevatten vaak meer dan enkel het antwoord op de vraag, en vormen soms een mogelijke verdere stap in de redenering van de leerlingen.

LESACTIVITEIT

Zand op een ellips

1 Giet zoveel mogelijk droog zand op een ellips die in karton uitgeknipt is en die horizontaal op een bekertje rust. Wat zie je?

✔ *In bovenaanzicht zien we een kamlijn: een stuk van de grote as, symmetrisch rond het middelpunt. Deze kamlijn lijkt niet tot aan de toppen op de grote as te gaan. Een eerste hypothese: misschien vallen de eindpunten van (het bovenaanzicht van) de kamlijn samen met de brandpunten van de ellips? In vooraanzicht zien we dat deze kam niet horizontaal loopt, maar in het midden hoger is dan opzij. Dit is niet zo verwonderlijk: de punten in het midden van de ellips liggen verder van de rand...*





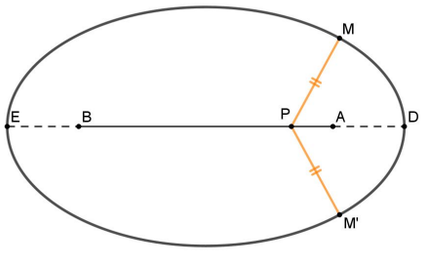
Vanaf nu werken we in het bovenaanzicht. De punten van de kamlijn beschouwen we als punten van de grote as van de ellips. We kunnen wel verwijzen naar de afrollende zandkorrels in de ruimte, maar als we punten of rechten benoemen, doen we aan vlakke meetkunde.

2 Net als in de vorige opgaven kun je de kamlijn bekijken als een meetkundige plaats van punten die aan een bepaalde voorwaarde voldoen. Aan welke voorwaarde moeten de punten van de kamlijn voldoen?

✔ *De kamlijn is de meetkundige plaats van de punten op gelijke loodrechte afstand tot twee of meer randen van de figuur, hier dus tot de ellips. Immers, zandkorrels rollen naar de dichtste rand. Zandkorrels aan de ene kant van de kamlijn rollen naar de ene rand en zandkorrels aan de andere kant van de kamlijn rollen naar de andere rand.*

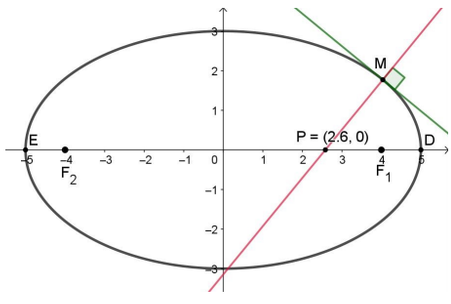
Op de volgende figuur klopt dit duidelijk voor de punten van de grote as $[DE]$ die niet te ver van het middelpunt liggen. Punten van de grote as die ver aan de zijkant liggen, dicht bij een van de toppen D of E, die rollen recht naar deze top. Ze liggen dus niet op een kamlijn want er is

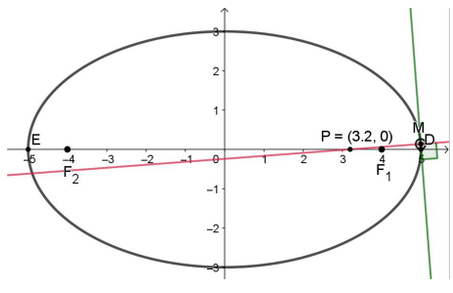
maar één punt van de rand waar ze het dichtste bij liggen. De vraag zal dus zijn: waar zijn de eindpunten A en B van de kamlijn, dus zo dat een punt P tussen A en B twee dichtste randpunten M en M′ heeft, en een punt tussen A en D (of tussen B en E) slechts één, namelijk D (of E).



3 Je kunt het misschien omkeren. In plaats van een variabel punt P op de grote as te nemen, en je af te vragen hoe dicht het bij de top moet liggen opdat deze top het dichtste randpunt zou zijn, kun je ook een variabel punt M van de ellips nemen, en dat steeds dichter naar de top D laten gaan, en bepalen waar het bijbehorende punt P van de grote as in de limiet naartoe gaat. Onderzoek dit met GeoGebra voor de ellips $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

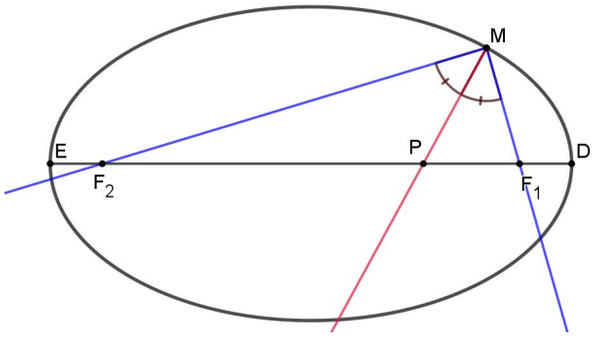
✔ *Leerlingen tekenen deze ellips met GeoGebra, nemen een punt M hierop, en met de knoppen 'raaklijnen' en 'loodlijn' kunnen ze de normaal in M tekenen en snijden met de grote as. Ze vinden dat voor M heel dicht bij de top D het punt P coördinaat* $(3{,}2; 0)$ *heeft (zie figuur rechts). Dit is nog geen exacte methode, maar het lijkt er alvast op dat het eindpunt A van de kam niet het brandpunt zal zijn. Deze ellips heeft brandpunten* $F_{1,2}(\pm 4, 0)$.





4 We willen nu het eindpunt A aan de rechterkant van de kam exact localiseren. Ken je een eigenschap van de ellips waar de normaal een rol in speelt?

✔ *De weerkaatsingseigenschap zegt dat* F_1M *en* F_2M *gelijke hoeken vormen met de normaal* MP. *(Waardoor een lichtstraal die in* F_1 *vertrekt, in* F_2 *toekomt en omgekeerd...). Dus:* MP *is de bissectrice van de hoek* $F_1\hat{M}F_2$.



5 Wat zegt dit over de positie van punt P op de grote as. Of, preciezer gezegd, wat weet je over de verhouding $\frac{|F_1P|}{|F_2P|}$?

✔ *De bissectricestelling zegt: de bissectrice van een hoek van een driehoek verdeelt de overstaande zijde in stukken die in dezelfde verhouding staan als de aanliggende zijden. Hier, in de driehoek F_1MF_2 geeft dit:*

$$\frac{|F_1P|}{|F_2P|} = \frac{|F_1M|}{|F_2M|}.$$

6 Maak de redenering af: waar komt P terecht als M naar de top D gaat?

✔ *Als M naar D gaat, komt P in het grenspunt A van de kamlijn $[AB]$ terecht. Het punt A is dus bepaald door*

$$\frac{|F_1A|}{|F_2A|} = \frac{|F_1D|}{|F_2D|}.$$

7 Maak het eens concreet, voor de ellips van vraag 3.

✔ *Voor de ellips $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ is de halve grote as 5 en de halve kleine as 3. We hebben $D(5,0)$, $F_1(4,0)$ en $F_2(-4,0)$. Stel nu $A(u,0)$. We zoeken u met de gevonden gelijkheid van verhoudingen.*

$$\frac{4-u}{u-(-4)} = \frac{5-4}{5-(-4)}$$

Deze vergelijking oplossen naar u geeft: $u = 3{,}2$. Precies wat we met GeoGebra vonden. Merk op: in de vergelijking hierboven gingen we ervan uit dat $u < 4$. Dit hebben de leerlingen overtuigend gezien bij het onderzoeken met GeoGebra.

Collega's die nog een uitgebreide cursus analytische meetkunde gegeven hebben in de jaren 1980, zullen de gelijkheid van verhoudingen

$$\frac{|F_1A|}{|F_2A|} = \frac{|F_1D|}{|F_2D|}.$$

misschien herkennen. Men zegt dat de vier punten F_1, F_2, A, D een *harmonisch puntenviertal* vormen.

Uiteraard is dit niet iets dat de leerlingen zullen opmerken.

Tot slot

Hopelijk hebben we jou in deze loep geen zand in de ogen gestrooid met de bewering dat er best wat wiskunde te beleven is met een hoopje zand op een stuk karton.

BRONNEN

Dendoncker, J.-M. (2025). Moet er nog zand zijn? *Wiskunde en Onderwijs, 51/203*, 28-34.

Élèves des collèges Vieux colombier (LeMans) et Vieux Chêne. (2009). La géométrie du tas de sable. *http://soleil.rene.free.fr/neo/Butinages/La_geometrie_du_tas_de_sable.pdf*

Eggermont, H., Roelens, M. (2004). Kegelsneden. *Uitwiskeling 20/4*, 9-42.

Gilbert, T. (2017). Tas de sable sur une ellipse. In Gilbert, T., Ninove, L., le GEM, *Le plaisir de chercher en mathématiques*. Louvain-la-Neuve: Presses Universitaires de Louvain.

Levrie, P., Penne, R. (2015). Kegelsneden made easy. *Uitwiskeling 31/3*, 15-17.

Matemateca. (z.d.). Sandpiles. *https://matemateca.ime.usp.br/acervo/montanhas_areia_ingles.html*

M3 Matemática Multimídia. (23 maart 2012). Montanhas geométricas. *YouTube op https://www.youtube.com/watch?v=f2kBia-jNfg*

Pierson, P. (2012). La géométrie des tas de sable. *Travail de fin d'études*, Haute École Galilée.