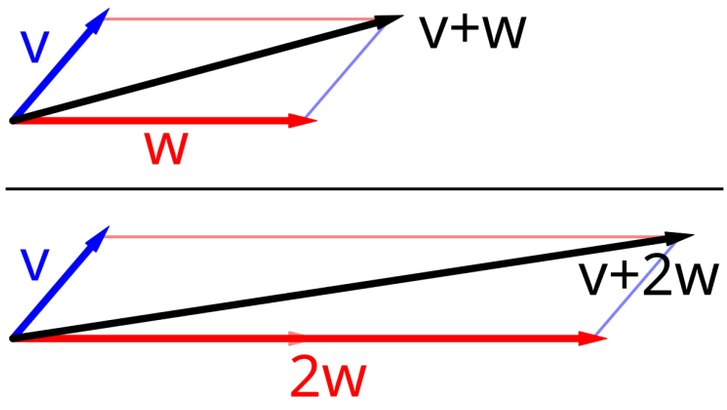
Vectorruimten

Els Vanlommel
Alexander Holvoet
Pedro Tytgat



INHOUD

1 **Van concreet naar abstract** 26
2 **Van de axioma's** 34
3 **Vanuit zelfstandig onderzoeken** . . 39
4 **Gekende problemen** 47

Inleiding en opzet

In de specifieke minimumdoelen vinden we in de derde graad gevorderde wiskunde (voor richtingen met component wiskunde) een nieuw doel rond abstracte structuren: "De leerlingen analyseren verzamelingen voorzien van één of meerdere bewerkingen aan de hand van een algebraïsche structuur." Dit doel is breed en kan op verschillende manieren en met verschillende structuren ingevuld worden. In de memorie bij het doel staan als voorbeelden van een algebraïsche structuur: groep, ring, veld en vectorruimte. Over groepentheorie schreven we al een loep in UW 38/4 (Vanlommel en Roelens, 2024). Nu is het de beurt aan vectorruimten. Het is aan jou als leraar om, rekening houdend met de doelgroep, te beslissen welke algebraïsche structuur wordt behandeld. Waarom zou je voor vectorruimten kiezen? Bij vectorruimten worden op relatief korte tijd heel wat fundamentele wiskundige begrippen aangeleerd, zoals lineaire combinatie, opspanning, deelruimte, lineaire (on)afhankelijkheid, basis en dimensie. Deze begrippen komen uitgebreid aan bod in zowat alle wetenschappelijke opleidingen in het hoger onderwijs. Vaak zijn dat de opleidingen waar leerlingen uit richtingen met component wiskunde in het secundair later terechtkomen. Het is dus goed als zij al met vectorruimten kennismaken in het secundair onderwijs. Daarnaast biedt de studie van vectorruimten mooie verbanden met andere leerstofonderdelen die aan bod komen in de gevorderde wiskunde, zoals ruimtemeetkunde (rechten en vlakken door de oorsprong), lineaire stelsels, matrices en determinanten. Dat betekent niet per se dat al deze leerstof moet behandeld zijn vooraleer je met het onderdeel vectorruimten start. Voorkennis van ruimtemeetkunde is mooi meegenomen, maar geen absolute noodzaak. Naast verbanden binnen wiskunde zijn er ook linken met vectoren in fysica.

In de meeste lessen op school en in de meeste handboeken wordt de leerstof van vectorruimten axiomatisch aangebracht. Deze aanpak wordt uitgebreid besproken in paragraaf 2 van deze loep. Daar frissen we ook de belangrijkste concepten van vectorruimten op. Omdat sommige doelgroepen mogelijk baat hebben bij een iets minder abstracte aanpak, stellen we naast de axiomatische aanpak nog twee andere mogelijke instappen voor. Paragraaf 1 beschrijft een aanpak waarbij we concepten en eigenschappen bestuderen binnen een concrete vectorruimte om van daaruit de veralgemening voor te bereiden. In paragraaf 3 brengen

we nieuwe concepten aan vanuit open problemen. Leerlingen gaan hierbij voornamelijk zelfstandig op onderzoek. We werkten enkele voorbeelden van zulke open problemen volledig uit en tonen de grote lijnen van dat lesmateriaal in paragraaf 3. Dit lesmateriaal wordt als interactieve website, maar ook als af te drukken document online beschikbaar gesteld. Ook al bieden we verschillende lesmaterialen aan, toch vormt de loep absoluut geen afgewerkte cursus vectorruimten.

In paragraaf 4 bespreken we enkele veel voorkomende misconcepties bij vectorruimten en plaatsen we die in de bredere vakdidactische theorie van de “drie werelden”.

Tot slot merken we nog op dat we ons in deze loep beperken, op enkele occasionele voorbeelden na, tot eindigdimensionale vectorruimten over het veld $\mathbb{R}$.

1 Van concreet naar abstract

In paragraaf 2 zal mijn collega-auteur een sterk axiomatische aanpak van de lessen rond vectorruimten voorstellen. Vooral in de 6-uursrichtingen van mijn school merkten we dat sommige leerlingen afhaakten op het abstract formele karakter van de leerstof rond vectorruimten. Om het meer plastisch te zeggen: ‘Dat viel daar op een koude steen’. Deze leerlingen memoriseerden de theorie en voerden het algebraïsche rekenwerk uit zonder dat ze goed wisten waarmee ze bezig waren en zonder dat ze de geziene concepten diepgaand begrepen. Ze geraakten daardoor gedemotiveerd en eindigden met een afkeer voor abstracte wiskunde. Dat kan natuurlijk niet de bedoeling zijn.

Hierbij komt dat je binnen het verplichte programma voor gevorderde wiskunde, zeker wanneer je dat in 6 uur moet afwerken i.p.v. 7 of 8 uur, niet altijd de tijd hebt om de nieuwe concepten grondig te laten insijpelen of doorgedreven onderzoekend te werken.

Hoe kun je deze doelgroep in de beperkte tijd die er is toch bereiken met een abstract verhaal zonder dat zij onderweg afhaken?

Concreet en toch abstract

We stellen een aanpak voor waarbij we vanuit gekende voorbeelden eerst de gemeenschappelijke algebraïsche structuur afleiden. We starten het verhaal met voorbeelden van vectorruimten die de leerlingen al kennen. Hoewel de individuele objecten in die verzamelingen en de bewerkingen die ermee uitgevoerd worden totaal anders zijn, hebben deze bewerkingen dezelfde eigenschappen. Wiskundigen zouden geen wiskundigen zijn als ze dan niet een manier zouden zoeken waarmee ze al deze verzamelingen tegelijk kunnen beschrijven. Dit brengt ons bij het algemene concept van een vectorruimte en de abstracte definitie ervan met de gekende axioma’s. Belangrijk: we beperken ons tot vectorruimten over $\mathbb{R}$.

In de wetenschap dat andere concrete vectorruimten dezelfde eigenschappen zullen hebben, ontginnen we dan de vectorruimtestructuur verder aan de hand van één goed gekozen concrete verzameling, namelijk $\mathbb{R},\mathbb{R}^n,+$. Dit stelt ons in staat om bij het introduceren van nieuwe definities of bij het onderzoeken, formuleren en bewijzen van eigenschappen telkens terug te grijpen naar de concrete situatie van geordende n-tallen die we meetkundig kunnen visualiseren voor $n = 2$ en $n = 3$. Zo proberen we de intuïtie voor de nieuwe concepten te versterken. Tegelijk verhindert de beperking tot $\mathbb{R}^n$ niet om het typische algebraïsche rekenwerk te doen dat bij vectorruimten hoort. Doorheen de lessenreeks benadrukken we regelmatig het uiteindelijke opzet: een algemeen abstract raamwerk bouwen dat verder gaat dan de concreet gekozen verzameling en waarbij vectoren alle mogelijke objecten kunnen zijn.

Aan het einde van de lessenreeks illustreren we het nut van die abstrahering door kort de geleerde concepten over te zetten naar andere concrete verzamelingen die niet zo voor de hand liggen. Die concepten zullen uitgebreid opnieuw aan bod komen in vrijwel alle wetenschappelijke opleidingen van het hoger onderwijs, waar nu de stap naar $\mathbb{R},V,+$ vlot kan gezet worden. Het belang van abstractie kan ook getoond worden door concrete toepassingen te bestuderen. Zo kan voor het benaderen van gegevens gebruik gemaakt worden van het algemeen concept van de orthogonale projectie van een vector op een deelruimte van een vectorruimte die uitgerust is met een scalair product. Mooie, maar niet zo gemakkelijke, toepassingen zijn dimensiereductie bij datasets of beeldcompressietechnieken zoals MP3 en JPEG.

Waar vind je lesmateriaal voor deze aanpak?

Steunend op het werk van Koen De Naeghel, ontwikkelden de auteurs van Wiskundeplan een cursustekst (De Naeghel e.a., 2024) die volledig aansluit bij de hierboven beschreven aanpak en die direct in de klas kan gebruikt worden. De theo-

rie is in deze cursus rigoureus opgebouwd en het geheel is abstract, ondanks de beperking tot één concrete verzameling en de visualisering van veel concepten. Zo komt het tegemoet aan het eigenlijke doel van het minimumdoel rond abstracte structuren, namelijk leerlingen laten kennismaken met en motiveren voor de abstractie die zo eigen is aan zuivere wiskunde. De strakke vorm van de cursus is mogelijk ongewoon voor leerlingen, maar vormt een goede voorbereiding op cursussen in het hoger onderwijs. Een bewerkbare versie die je helemaal naar je hand kunt zetten (bv. sommige eigenschappen enkel visueel verantwoorden en de formele bewijzen ervan weglaten), kun je downloaden via https://wiskundeplan.be/lesmateriaal/.

Ook de lessenreeks 'Essence of linear algebra' van 3Blue1Brown (Sanderson, 2016) is een aanrader. Deze cursus bestaat uit 16 youtube-filmpjes die verder gaan dan louter vectorruimten en die heel mooi het breder kader schetsen. De belangrijkste concepten van vectorruimten komen aan bod op een manier die goed aansluit bij de hierboven beschreven aanpak. In de filmpjes wordt immers een intuïtieve 'visual first-approach' gehanteerd waarbij de behandelde concepten gevisualiseerd worden met vectoren in het vlak. Deze cursus is vooral interessant voor leraren die meer achtergrond zoeken en meer intuïtie willen verwerven bij lineaire algebra. Sommige filmpjes en fragmenten kunnen ook in de les gebruikt worden. Het Engels dat hier gesproken wordt, is rudimentair en goed verstaanbaar voor leerlingen.

Leraren die meer diepgaande achtergrond zoeken, gecombineerd met concrete toepassingen en visualisatie van de concepten, vinden zeker hun gading in het uitstekende boek 'Linear Algebra and Its Applications' van David C. Lay (Lay, 2016). Je kunt dat boek niet gebruiken als handboek voor de leerlingen, maar je vindt er wel inspiratie en goede oefeningen voor in de klas.

Lesmateriaal voor de mooie toepassing die we hierboven al noemden, vind je in het voorbereidend materiaal voor het Internationaal Wiskundetoernooi 2025, 'Orthogonaliteit en benadering: van loodlijn tot JPEG'. De theorie van vectorruimten is in die bundel niet gedetailleerd uitgewerkt en de focus ligt vooral op toepassingen die alle te maken hebben met het benaderen en comprimeren van gegevens. Voor een groep leerlingen die vooral geïnteresseerd is in het gebruiken van wiskunde is dit heel boeiende materie en uitstekend lesmateriaal.

In de volgende paragrafen werken we enkele onderdelen uit die in de vorige paragrafen onderbelicht zijn gebleven, zoals het inspelen op voorkennis.

Voorkennis

Om ervoor te zorgen dat leerlingen de nieuwe concepten sneller en gemakkelijker internaliseren, kun je deze in de eerste en tweede graad op een aantal plaatsen al voorbereiden.

In de getallenleer van de eerste graad en het derde jaar komen de eigenschappen van de som en het product van getallen aan bod. Leerlingen kennen begrippen als inwendigheid, commutativiteit, associativiteit, distributiviteit, neutraal en invers element. Het kennen van die benamingen is niet alleen handig om er snel naar te verwijzen bij berekeningen. Door de eigenschappen van de bewerkingen nauwkeurig en formeel (met letters en kwantoren) te beschrijven en te benoemen, bereid je de leerlingen stap voor stap voor op abstracte wiskunde, ook al lijkt dat op dat moment misschien overbodige abstractie.

In de tweede graad worden de som en het scalair veelvoud van vectoren in het vlak behandeld. In richtingen die voorbereiden op gevorderde wiskunde worden die bewerkingen vertaald naar de coördinaten van vectoren. Je kunt met de vakgroep afspreken dat je dan al kort focust op de eigenschappen van de som en het veelvoud van vectoren en van geordende tweetallen. Je kunt hier bovendien een eerste keer de begrippen lineaire combinatie en basis laten vallen. Ervaren leraren weten dat het helpt om begrippen spiraalsgewijs aan bod te laten komen, zelfs als dat in eerste instantie een oppervlakkige kennismaking is.

In de derde graad gevorderde wiskunde staan complexe getallen en matrices op het programma. De eigenschappen van de gebruikelijke bewerkingen kunnen ook hier formeel beschreven en benoemd worden. Je kunt het begrip commutatieve groep in deze context introduceren en de eigenschappen van de som en het reëel veelvoud van matrices zijn heel geschikt voor een eerste vermelding van het begrip vectorruimte. Je kunt dan al enkele voorbeelden van vectorruimten naast elkaar plaatsen om zo de gemeenschappelijkheid van eigenschappen te illustreren én (niet onbelangrijk!) ook tegenvoorbeelden geven.

Naast matrices zijn lineaire stelsels en determinanten vereiste voorkennis voor een lessenreeks die de vectorruimte $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, +$ centraal stelt. Hoewel je de nieuwe concepten meetkundig kunt visualiseren in

het vlak en in de ruimte voor $n = 2$ en $n = 3$, is het niet absoluut nodig om ruimtemeetkunde vooraf al behandeld te hebben. De intuïtieve voorkennis van leerlingen volstaat.

Vertrekken van concrete voorbeelden

Zoals al vermeld, starten we de lessenreeks in eerste instantie met veel voorbeelden en tegenvoorbeelden van concrete verzamelingen voorzien van een optelling en een scalaire vermenigvuldiging. Leerlingen moeten goed beseffen dat het begrip vector bij vectorruimten verder gaat dan de klassieke vectoren (met de pijlenvoorstelling) die ze tot dan toe zijn tegengekomen. Bovendien moeten ze inzien dat de som en de scalaire vermenigvuldiging waarvan sprake ook niet de typische gekende vorm moeten aannemen. Om dat te bereiken, moet je zeker de tijd nemen om voldoende voorbeelden te behandelen en ook de meer exotische. Verderop bespreken we enkele voorbeelden. Het is belangrijk dat je bij elk voorbeeld kort telkens de axioma's van een vectorruimte overloopt zodat leerlingen de overeenkomsten tussen de verschillende verzamelingen zien. Verderop in deze loep, in de paragraaf over de axiomatische aanpak, worden de axioma's van een vectorruimte opgesomd. Merk op dat het woord 'axioma' in de context van vectorruimten wat vreemd kan overkomen. In een intuïtieve aanpak van de meetkunde zijn axioma's basiseigenschappen waarvan we de waarheid zonder bewijs aannemen. Bij vectorruimten (en ook bij een meer formele aanpak van de meetkunde) krijgen de axioma's het karakter van definiërende basiseigenschappen: ze geven aan waaraan een wiskundige structuur moet voldoen om een vectorruimte te worden genoemd. In beide gevallen gaat het om basiseigenschappen waaruit dan alle andere eigenschappen logisch worden afgeleid. Je vindt veel voorbeelden en tegenvoorbeelden van vectorruimten in de klassieke handboeken en het hierboven gesuggereerde materiaal. We sommen er enkele op.

De verzameling $\mathbb{R}^2$ van reële koppels, de verzameling vectoren $\mathscr{V}$ in het vlak, de verzameling $\mathbb{R}^{m\times n}$ van $m \times n$-matrices en de verzameling $\mathbb{C}$ van complexe getallen zijn al gekende vectorruimten.

Minder voor de hand liggende voorbeelden:

- de verzameling $\mathbb{R}[x]$ van reële veeltermen in x, voorzien van de gekende optelling en scalaire vermenigvuldiging van veeltermen,
- de verzameling van alle reële functies $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)\}$, voorzien van de puntsgewijze optelling en de puntsgewijze scalaire vermenigvuldiging van functies,
- de verzameling van alle 3×3-diagonaalmatrices voorzien van de optelling en scalaire vermenigvuldiging van matrices,
- de verzameling $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ van alle reële rijen voorzien van de termsgewijze optelling en scalaire vermenigvuldiging van rijen,
- voor een gegeven waarde van $k \in \mathbb{R}$, de vectorruimte van alle functies f die oplossingen zijn van de differentiaalvergelijking $f' = kf$ uitgerust met de puntsgewijze optelling en de puntsgewijze scalaire vermenigvuldiging,
- de verzameling van geordende drietallen die oplossingen zijn van het homogeen stelsel

$$\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 4x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

voorzien van de gekende optelling en scalaire vermenigvuldiging van geordende drietallen.

Exotische voorbeelden die misschien wat vergezocht lijken, maar die dwingen tot abstrahering:

- de verzameling $V = \{(a,b,c) | a,b,c \in \mathbb{R}\}$ met som $(a_1,b_1,c_1) + (a_2,b_2,c_2) = (a_1 + a_2 - 2, b_1 + b_2, c_1 + c_2 + 2)$ en scalaire vermenigvuldiging $r \cdot (a,b,c) = (ra + 2 - 2r, rb, rc - 2 + 2r)$,
- de verzameling $V = \{(a,b) | a,b \in \mathbb{R}_0^+\}$ voorzien van de optelling $(a,b) + (c,d) = (ac,bd)$ en scalaire vermenigvuldiging $r \cdot (a,b) = (a^r, b^r)$ met $r \in \mathbb{R}$.

Bij deze exotische voorbeelden is het een goede oefening om te beargumenteren waarom ze vectorruimten zijn en om het neutraal element en het symmetrisch element te zoeken.

Bij tegenvoorbeelden is het belangrijk om na te gaan waarom het geen vectorruimten zijn. Dat kan vaak aan de hand van verschillende axioma's. We illustreren dit hier.

- De verzameling $\mathbb{Z}^2$ van koppels gehele getallen, uitgerust met de gekende optelling en scalaire vermenigvuldiging van koppels is geen vectorruimte. Deze verzameling is niet gesloten onder de scalaire vermenigvuldiging. Het veelvoud $\frac{1}{3}(5,-7)$ bijvoorbeeld, behoort niet tot $\mathbb{Z}^2$.
- De eenheidscirkel in $\mathbb{R}^2$: $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, uitgerust met de gekende optelling en scalaire vermenigvuldiging van koppels

is geen vectorruimte. De som van twee punten op de eenheidscirkel ligt immers niet op die cirkel. Ook bijvoorbeeld bevat de eenheidscirkel geen neutraal element voor de optelling omdat de nulvector (0,0) niet op de cirkel ligt.

- Ook de verzameling oplossingen van een niethomogeen stelsel $AX = B$ (met $B \neq 0$) van lineaire vergelijkingen is geen vectorruimte. Ze mist immers een neutraal element. Ook is ze niet gesloten onder de optelling: als X_1 en X_2 oplossingen zijn, dan is $X_1 + X_2$ geen oplossing want $A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = B + B = 2B \neq B$.

Na de voorbeelden, tegenvoorbeelden en linken met al geziene leerstof gaan we dieper in op de eigenschappen van vectorruimten.

De vectorruimte $\mathbb{R},\mathbb{R}^n,+$

We hebben hierboven aangehaald dat het volstaat om de eigenschappen in het grootste deel van de lessenreeks te onderzoeken voor één concrete verzameling. We verduidelijken dit idee met een voorbeeld.

Met elke 2×2-matrix kunnen we op een natuurlijke manier juist één geordend viertal associëren:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \quad \text{komt overeen met} \quad (x_1,x_2,x_3,x_4).$$

Dat verband is omkeerbaar: bij elk geordend viertal hoort één 2×2-matrix. Het is dus een bijectie tussen de verzamelingen $\mathbb{R}^{2\times2}$ en $\mathbb{R}^4$.

Deze bijectie bewaart de optelling en scalaire vermenigvuldiging. Zo is bijvoorbeeld

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$$

en

$$(1,3,8,2) + (6,0,1,5) = (7,3,9,7).$$

We zeggen: de vectorruimten $\mathbb{R}^{2\times2}$ en $\mathbb{R}^4$ zijn isomorf en we noteren $\mathbb{R}^{2\times2} \cong \mathbb{R}^4$. Dit betekent dus dat er een bijectie bestaat tussen deze verzamelingen die de optelling en de scalaire vermenigvuldiging bewaart.

We hernemen het (mooie!) voorbeeld van de vectorruimte $V = \{(a,b) | a,b \in \mathbb{R}_0^+\}$ voorzien van de optelling $(a,b) + (c,d) = (ac,bd)$ en scalaire vermenigvuldiging $r \cdot (a,b) = (a^r,b^r)$ met $r \in \mathbb{R}$. Dit is een vectorruimte die isomorf is met $\mathbb{R}^2$ via de logaritmische afbeelding:

$$\phi : V \to \mathbb{R}^2, \quad \phi(a,b) = (\ln a, \ln b).$$

Deze bijectie bewaart de optelling en de scalaire vermenigvuldiging. Zo bijvoorbeeld is

$$\begin{aligned} \phi\big((a,b)+(c,d)\big) &= \phi\big((ac,bd)\big) \\ &= \big(\ln(ac),\ln(bd)\big) \\ &= \big(\ln a + \ln c, \ln b + \ln d\big) \\ &= \big(\ln a, \ln b\big) + \big(\ln c, \ln d\big) \\ &= \phi\big((a,b)\big) + \phi\big((c,d)\big). \end{aligned}$$

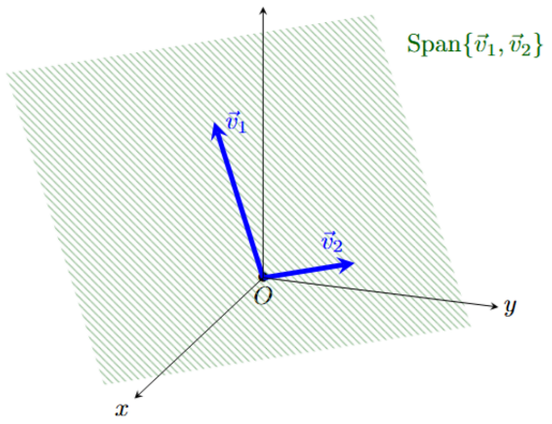
Merk op dat je hier sommen in V en sommen in $\mathbb{R}^2$ met hetzelfde symbool noteert. Het kan dan soms duidelijker zijn om de som in V met een ander symbool te noteren, zoals bijvoorbeeld $\oplus$.

We kunnen bewijzen dat alle reële vectorruimten met dezelfde dimensie isomorf zijn. Intuïtief betekent dit dat vectorruimten met dezelfde dimensie op de betekenis van de objecten en bewerkingen na aan elkaar gelijk zijn, in het bijzonder dat de bewerkingen precies dezelfde eigenschappen hebben. Als we ons beperken tot eindigdimensionale vectorruimten, dan volstaat het om de vectorruimtestructuur verder te onderzoeken voor één concrete verzameling. Automatisch gelden de bevindingen dan voor alle vectorruimten met dezelfde dimensie. Er gaat geen inzicht verloren in de nieuwe concepten door in één specifieke vectorruimte te werken.

Een voor de hand liggende keuze is de vectorruimte van de geordende n-tallen $\mathbb{R},\mathbb{R}^n,+$. Met deze keuze kun je immers van elk belangrijk concept een meetkundige interpretatie geven in het vlak of in de ruimte. Zo kunnen we bijvoorbeeld de opspanning, $\text{Span}\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$, van de vectoren $\vec{v}_1 = (2,0,3)$ en $\vec{v}_2 = (-1,1,0)$ visualiseren met een vlak door de oorsprong dat de twee ruimtelijke vectoren met coördinaten $(2,0,3)$ en $(-1,1,0)$ bevat. Dat vlak wordt als het ware zoals een (oneindig) vlies opgespannen door deze twee vectoren.

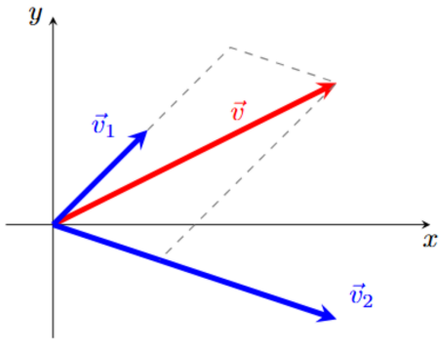
Het concept van een opspanning van vectoren krijgt door deze voorstelling een concrete betekenis. Dit helpt om meer intuïtie op te bouwen voor het begrip. Nadeel van deze aanpak is dat het risico bestaat dat leerlingen gaan denken dat vectoren in een vectorruimte altijd de typische gekende vectoren van de pijlenvoorstelling zijn. Het is dus belangrijk om doorheen de lessenreeks regelmatig te verwijzen naar de voorbeelden van bij het begin om duidelijk te maken dat vectoren in de

algemene context van vectorruimten ook compleet andere objecten kunnen zijn.



Figuur 1 *– Visualisatie van de opspanning van twee vectoren. Bron: https://wiskundeplan.be/lesmateriaal/*

Ook het begrip basis van een vectorruimte kan gevisualiseerd worden. In figuur 2 is de vector $\vec{v}$ geschreven als lineaire combinatie van de basisvectoren $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$. Deze zijn de meetkundige voorstelling van de vectoren $\vec{v}_1 = (1,1)$ en $\vec{v}_2 = (3,-1)$ van $\mathbb{R}^2$. Merk op dat voor $n > 3$ een visualisatie niet voor de hand ligt. Dat maakt dat je voor $n > 3$ niet zomaar kunt terugvallen op intuïtie gebaseerd op de meetkundige voorstelling van de concepten. Het dwingt om die concepten ook abstract te bekijken en met algemene n-tupels te redeneren.



Figuur 2 *– Visualisatie van een basis van het vlak. Bron: https://wiskundeplan.be/lesmateriaal/*

Terug naar andere vectorruimten

Aan het einde van de lessenreeks, nadat we de fundamentele concepten en eigenschappen van de vectorruimte $\mathbb{R},\mathbb{R}^n,+$ hebben bestudeerd, illustreren we kort nog het nut van abstractie door de geleerde concepten te vertalen naar andere concrete verzamelingen. We geven hier twee voorbeelden.

In een eerste voorbeeld bekijken we de verzameling $\mathbb{P}_n$ van alle veeltermen met reële coëfficiënten en met graad hoogstens n. In de volgende lesactiviteit gaan we na of een gegeven verzameling veeltermen een basis vormt voor $\mathbb{P}_n$. We gebruiken daarvoor de algebraïsche technieken die we leerden bij $\mathbb{R}^n$.

LESACTIVITEIT

De verzameling van alle veeltermen van graad hoogstens n

Stel $\mathbb{P}_n$ de verzameling van alle veeltermen van graad hoogstens n. Dit zijn alle veeltermen van de vorm $\vec{v}(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Elke vector van $\mathbb{P}_n$ is dus per definitie een lineaire combinatie van de vectoren $\vec{v}_0 = 1$, $\vec{v}_1 = x$, $\vec{v}_2 = x^2, \ldots, \vec{v}_n = x^n$. Bijgevolg is de verzameling $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ een basis voor $\mathbb{P}_n$ en de dimensie van $\mathbb{P}_n$ is $n+1$.

Ga na, met dezelfde algebraïsche technieken als bij $\mathbb{R}^n$, of $\{3+7x, 5+x-2x^3, x-2x^2, 1+16x-6x^2+x^3\}$ een basis vormt voor $\mathbb{P}_3$.

Oplossing:
We noteren de vier gegeven vectoren als:

$$\vec{v}_1 = 3 + 7x$$
$$\vec{v}_2 = 5 + x - 2x^3$$
$$\vec{v}_3 = x - 2x^2$$
$$\vec{v}_4 = 1 + 16x - 6x^2 + x^3$$

Om te controleren of deze vectoren een basis vormen voor $\mathbb{P}_3$, moeten we nagaan of ze lineair onafhankelijk zijn. Aangezien $\dim(\mathbb{P}_3) = 4$ en we vier vectoren hebben, is lineaire onafhankelijkheid voldoende om te concluderen dat ze een basis vormen. We schrijven elke veelterm als een coördinatenvector ten opzichte van de standaardbasis $\{1, x, x^2, x^3\}$:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= 3 + 7x + 0x^2 + 0x^3 \quad &\longrightarrow \quad [3, 7, 0, 0]^T \\
\vec{v}_2 &= 5 + 1x + 0x^2 - 2x^3 \quad &\longrightarrow \quad [5, 1, 0, -2]^T \\
\vec{v}_3 &= 0 + 1x - 2x^2 + 0x^3 \quad &\longrightarrow \quad [0, 1, -2, 0]^T \\
\vec{v}_4 &= 1 + 16x - 6x^2 + 1x^3 \quad &\longrightarrow \quad [1, 16, -6, 1]^T
\end{aligned}$$

Deze vier vectoren zijn lineair onafhankelijk als en slechts als de volgende matrix een niet-nul determinant heeft:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 1 & 16 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Je kunt narekenen dat $\det(A) = -64 \neq 0$ en dus zijn de vier vectoren lineair onafhankelijk. Bijgevolg vormt de verzameling

$$\{3 + 7x, 5 + x - 2x^3, x - 2x^2, 1 + 16x - 6x^2 + x^3\}$$

inderdaad een basis voor $\mathbb{P}_3$.

Bekijken we als tweede voorbeeld de verzameling van alle rijen van Fibonacci voorzien van de elementsgewijze optelling en scalaire vermenigvuldiging van rijen. Je kunt nagaan dat deze verzameling een vectorruimte vormt. De vectoren van deze vectorruimte zijn Fibonaccirijen. Deze hebben alle als recursief voorschrift: $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ met $n \geq 1$. Het zijn dus allemaal oplossingen van een homogene recursievergelijking (of differentievergelijking) van de tweede orde. Je kunt de dimensie van deze vectorruimte vinden door een basis te zoeken. Dat doen we in de volgende lesactiviteit.

LESACTIVITEIT

De verzameling van rijen van Fibonacci

Je kent de beroemde rij van Fibonacci: $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$

1 Geef het recursief voorschrift van deze rij.

✓ $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ *met* $u_1 = 0$ *en* $u_2 = 1$.

Door de begintermen te veranderen, vinden we oneindig veel andere rijen die aan hetzelfde recursief voorschrift voldoen. Enkele voorbeelden:

- De rij $(1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots)$ met begintermen $u_1 = 1$, $u_2 = 0$
- De rij $(2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$ met begintermen $u_1 = 2$, $u_2 = 3$
- De rij $(5, 5, 10, 15, 25, 40, \ldots)$ met begintermen $u_1 = 5$, $u_2 = 5$
- De rij $(-4, 2, -2, 0, -2, -2, -4, -6, \ldots)$ met begintermen $u_1 = -4$, $u_2 = 2$

We noemen dit allemaal rijen van Fibonacci.

We onderzoeken nu of de verzameling van alle Fibonaccirijen een vectorruimte vormt. Dan hebben we een som en een scalaire vermenigvuldiging van rijen nodig.

Stel $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \ldots)$ en $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3, \ldots)$ twee rijen van Fibonacci en c een reëel getal. We definiëren:

- $\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3, \ldots)$
- $c \cdot \vec{v} = (cv_1, cv_2, cv_3, \ldots)$

2 Stel $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \ldots)$ en $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3, \ldots)$ twee rijen van Fibonacci. Is de som $\vec{v} + \vec{w} = \vec{u}$ opnieuw een Fibonaccirij? Bewijs je antwoord.

✔ *Ja. De som is opnieuw een rij van Fibonacci. Om dit te bewijzen, moeten we aantonen dat* $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ *voor alle* $n \geq 1$.
Omdat $u_n = v_n + w_n$ *voor alle n, hebben we voor* $n \geq 1$*:*

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= v_{n+1} + w_{n+1} \\ &= (v_n + v_{n-1}) + (w_n + w_{n-1}) \quad \textit{(want } \vec{v} \textit{ en } \vec{w} \textit{ zijn Fibonaccirijen)} \\ &= (v_n + w_n) + (v_{n-1} + w_{n-1}) \quad \textit{(commutativiteit en associativiteit van de optelling in } \mathbb{R}) \\ &= u_n + u_{n-1}. \end{aligned}$$

3 Stel $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \ldots)$ een Fibonaccirij en $c \in \mathbb{R}$. Stel $\vec{u} = c \cdot \vec{v}$. Toon aan dat $\vec{u}$ ook een Fibonaccirij is.

✔ *We moeten aantonen dat* $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ *voor alle* $n \geq 1$.
Omdat $u_n = cv_n$ *voor alle n en* $\vec{v}$ *een Fibonaccirij is, geldt:*

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= cv_{n+1} \\ &= c(v_n + v_{n-1}) \quad \textit{(want } \vec{v} \textit{ is een Fibonaccirij)} \\ &= cv_n + cv_{n-1} \quad \textit{(distributiviteit van de vermenigvuldiging t.o.v. de optelling in } \mathbb{R}) \\ &= u_n + u_{n-1}. \end{aligned}$$

4 Stel F de verzameling van alle Fibonaccirijen. We hebben net aangetoond dat de optelling en de scalaire vermenigvuldiging inwendig is in F. Je kunt aan de hand van de andere axioma's nagaan dat F een vectorruimte is. Wat is het neutraal element voor de optelling in F? Behoort het tot F? Wat is het symmetrisch element van een vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \ldots)$ in F? Behoort dat tot F?

✔ *Het neutraal element is de nulrij* $\vec{0}_F = (0, 0, 0 \ldots)$ *Elke term (vanaf de tweede) in deze rij is de som van de twee vorige termen. Het is dus een rij van Fibonacci of nog* $\vec{0}_F \in F$. *Het symmetrisch element van* $\vec{v}$ *is* $-\vec{v} = (-v_1, -v_2, -v_3, \ldots)$. *Dit is opnieuw een rij van Fibonacci want* $\vec{v} \in F$.

We zoeken nu een basis voor F.

5 Stel $\vec{v}$ een Fibonaccirij met begintermen (x_1, x_2). Dan is $v_1 = x_1$ en $v_2 = x_2$. Schrijf de volgende 5 termen $v_3, v_4, \ldots, v_7$ als functie van x_1 en x_2

✔ $v_3 = x_1 + x_2$, $v_4 = v_3 + v_2 = x_1 + 2x_2$, $v_5 = v_4 + v_3 = x_1 + 2x_2 + x_1 + x_2 = 2x_1 + 3x_2$
$v_6 = v_5 + v_4 = \ldots = 3x_1 + 5x_2$, $v_7 = v_6 + v_5 = \ldots = 5x_1 + 8x_2$

6 Schrijf nu de rij $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, \ldots)$ als lineaire combinatie van twee andere rijen van Fibonacci.

✔

$$\begin{aligned}\vec{v} &= (x_1, x_2, x_1 + x_2, x_1 + 2x_2, 2x_1 + 3x_2, 3x_1 + 5x_2, 5x_1 + 8x_2, \ldots) \\ &= (1x_1, 0, 1x_1, 1x_1, 2x_1, 3x_1, 5x_1, \ldots) + (0, 1x_2, 1x_2, 2x_2, 3x_2, 5x_2, 8x_2, \ldots) \\ &= x_1(1,0,1,1,2,3,5,\ldots) + x_2(0,1,1,2,3,5,8,\ldots)\end{aligned}$$

Dus: $\vec{v} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2$ met $\vec{v}_2 = (0,1,1,2,3,5,8,\ldots)$, de standaard rij van Fibonacci, en $\vec{v}_1 = (1,0,1,1,2,3,5,\ldots)$, een verschoven rij van Fibonacci, aangevuld met een één links. We hebben nu aangetoond dat elke Fibonaccirij geschreven kan worden als lineaire combinatie van $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$. Deze twee vectoren zijn geen veelvoud van elkaar en zijn dus lineair onafhankelijk. De verzameling $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ vormt dus een basis voor de verzameling F van alle rijen van Fibonacci.

7 Wat is de dimensie van de vectorruimte van alle rijen van Fibonacci? Is dat logisch?

✔ *De dimensie van F is het aantal basisvectoren en dat is 2. Dat is logisch aangezien de recursievergelijking voor de rij van Fibonacci van de tweede orde is en de 2 begintermen dus alles vastleggen. Er zijn twee vrijheidsgraden.*



Vertel een verhaal en toon samenhang

Tijdens de lessen merkte ik dat het belangrijk is om de samenhang tussen de verschillende nieuwe concepten te expliciteren en de grote lijnen van het verhaal te blijven herhalen. Dit helpt leerlingen om het overzicht te bewaren. Er komt immers veel algebraïsch rekenwerk (met matrices, stelsels en eventueel ook determinanten) bij kijken en dat maakt dat leerlingen snel verdwalen in routines allerhande. Kort samengevat kan een logische opbouw, de verhaallijn als het ware, er als volgt uitzien.

1. We starten met concrete voorbeelden en de definitie van de vectorruimtestructuur. Daarna beperken we ons tot de vectorruimte $\mathbb{R},\mathbb{R}^n,+$.
2. In de wiskunde worden structuren vaak bestudeerd via hun deelstructuren. Wij doen dat voor $\mathbb{R},\mathbb{R}^n,+$ en zoeken deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ die ook de vectorruimtestructuur bezitten. Daarbij worden de begrippen deelruimte en opspanning van vectoren gedefinieerd. We leren dat de opspanning van vectoren een deelruimte is.
3. Omgekeerd kunnen we ons bij een gegeven deelruimte afvragen welke vectoren die deelruimte opspannen of voortbrengen en hoe we zulke voortbrengende vectoren kunnen vinden. Vervolgens willen we weten of we de deelruimte op de meest efficiënte manier opspannen. Wanneer kunnen we sommige van de voortbrengende vectoren weglaten omdat ze overbodig zijn? Deze vraag leidt naar het begrip lineair onafhankelijke vectoren.
4. Tot slot brengen we de begrippen voortbrengend en lineair onafhankelijk samen tot het begrip basis. Alle basissen van eenzelfde eindigdimensionale vectorruimte bevatten precies evenveel vectoren. Dat aantal noemen we de dimensie van de vectorruimte.
5. Het geleerde kan nu worden toegepast op alle andere vectorruimten omdat we weten dat eindigdimensionale reële vectorruimten met dezelfde dimensie isomorf zijn.

2 Van de axioma's

In de voorgaande paragraaf stelde mijn collega-auteur een aanpak voor die zeer geschikt is voor leerlingen in een 6u-cursus. Zelf gaf ik in mijn 8u-klas jarenlang een meer abstracte en rigoureuze benadering. Die biedt een andere kijk op dit onderwerp dan de aanpak binnen een concrete vectorruimte. Het neemt wat meer tijd in beslag, wat in een klas met meer dan 6 lestijden per week best haalbaar is.

Ik geef in grote lijnen enkele aspecten ervan en vermeld wat ik er als potentieel voordeel in zie. (Ik spreek overal in de verleden tijd, aangezien ik na een verhuis naar de andere kant van het land voorlopig niet langer in een 8u-richting lesgeef.)

Een voorbereiding op academische wiskunde

Bij een abstracte aanpak worden reële vectorruimten gedefinieerd vanuit een aantal axioma's, waarbij de verzameling V en de bewerkingen niet gespecificeerd zijn. Alle verdere definities, eigenschappen of stellingen worden op dit abstracte niveau aangebracht.

Definitie • Reële vectorruimte

Een niet-lege verzameling V, voorzien van de inwendige bewerkingen optelling $+$ en scalaire vermenigvuldiging $\cdot$, noemen we een reële vectorruimte $\mathbb{R},V,+$ wanneer ze aan de volgende acht axioma's voldoet:

(1) $\forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V : (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

(2) $\exists \vec{0}_V \in V : \forall \vec{u} \in V : \vec{u}+\vec{0}_V = \vec{u} = \vec{0}_V + \vec{u}$

(3) $\forall \vec{u} \in V : \exists \vec{u'} \in V : \vec{u}+\vec{u'} = \vec{0}_V = \vec{u'}+\vec{u}$

(4) $\forall \vec{u},\vec{v} \in V : \vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$

(5) $\forall r \in \mathbb{R} : \forall \vec{u},\vec{v} \in V : r \cdot (\vec{u}+\vec{v}) = r \cdot \vec{u} + r \cdot \vec{v}$

(6) $\forall r,s \in \mathbb{R} : \forall \vec{u} \in V : (r+s) \cdot \vec{u} = r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{u}$

(7) $\forall r,s \in \mathbb{R} : \forall \vec{u} \in V : r \cdot (s \cdot \vec{u}) = (r \cdot s) \cdot \vec{u}$

(8) $\forall \vec{u} \in V : 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Een voordeel van een dergelijke abstracte aanpak is dat zij leerlingen voorbereidt op wiskundecursussen aan de universiteit, waar het deductief werken vanuit abstracte axioma's of definities vaak de norm is. (Of die aanpak in alle opleidingen even wenselijk is, laten we hier even in het midden.) Door reële vectorruimten op zo'n abstracte manier te definiëren, bereiden we hen niet alleen inhoudelijk voor, maar introduceren we ook een manier van denken en redeneren die essentieel is voor academische wiskundevakken.

Onderscheid tussen eigenschappen van alle vectorruimten en van een concrete vectorruimte

De axioma's worden geïllustreerd met verschillende concrete voorbeelden van vectorruimten, die leerlingen in andere leerstofonderdelen al ontmoetten: matrices, n-tallen, veeltermen en uiteraard de meetkundige vectoren, in het vlak of in de ruimte.
Dan worden enkele basiseigenschappen aangetoond. Twee klassiekers zijn de uniciteit van het neutraal en invers element voor de optelling. In een concrete vectorruimte voelen deze echter niet aan als een eigenschap: bij matrices bijvoorbeeld is elke leerling ervan overtuigd dat enkel de nulmatrix neutraal element kan zijn voor de optelling en dat voor die bewerking enkel de matrix met tegengestelde elementen van een oorspronkelijke matrix het invers element van die matrix kan zijn.
Waarom de uniciteit bewijzen?
En zo komen we bij een tweede voordeel van een abstracte aanpak. Die maakt het mogelijk om scherp het onderscheid te maken tussen eigenschappen die typisch zijn voor elke vectorruimte en eigenschappen die inherent zijn aan een concrete vectorruimte.

Bewijs • Uniciteitseigenschappen

- Zij $\mathbb{R},V,+$ een vectorruimte en $\vec{0}_V$ en $\vec{0}'_V$ beide neutraal element. Omdat $\vec{0}'_V$ neutraal element is, geldt wegens (2) dat $\vec{0}_V = \vec{0}_V + \vec{0}'_V$. En omdat $\vec{0}_V$ neutraal element is, geldt wegens (2) dat $\vec{0}_V + \vec{0}'_V = \vec{0}'_V$. Hieruit volgt dat $\vec{0}_V = \vec{0}'_V$. Het neutraal element is uniek.
- Zij $\mathbb{R},V,+$ een vectorruimte en $\vec{v} \in V$ willekeurig. Veronderstel dat $\vec{v}$ twee inverse elementen $\vec{v}',\vec{v}'' \in V$ heeft. Dit betekent: $\vec{v}+\vec{v}' = \vec{0}_V = \vec{v}'+\vec{v}$ (a) en $\vec{v}+\vec{v}'' = \vec{0}_V = \vec{v}''+\vec{v}$ (b). Dan geldt:

$$\begin{aligned}
\vec{v}' &= \vec{v}' + \vec{0}_V && \text{(axioma (2))}\\
&= \vec{v}' + (\vec{v}+\vec{v}'') && \text{(gelijkheid (b))}\\
&= (\vec{v}'+\vec{v}) + \vec{v}'' && \text{(axioma (1))}\\
&= \vec{0}_V + \vec{v}'' && \text{(gelijkheid (a))}\\
&= \vec{v}'' && \text{(axioma (2))}
\end{aligned}$$

  Elk element van V heeft dus precies één invers element voor de optelling.

De uniciteit van het neutraal en invers element volgt uit de axioma's (1), (2) en (3) van vectorruimten en is dus niet specifiek voor $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Dat deze eigenschappen algemeen geldig zijn, ontslaat ons van de plicht ze in de toekomst telkens opnieuw te bewijzen in nieuwe concrete vectorruimten. Ook daarin schuilt de kracht van een algemene, abstracte aanpak.

Merk op dat het ten gevolge van de uniciteit van *het* invers element is dat we de notatie $-\vec{v}$ voor de inverse van $\vec{v}$ ondubbelzinnig kunnen invoeren en dat we een aftrekking kunnen definiëren.

Ziehier een tweede voorbeeld, voor een minder klassieke eigenschap. Voor een matrix A is het vanzelfsprekend dat $0\cdot A = O$, met O de nulmatrix, of $-1\cdot A = -A$. Maar is dit typisch voor $\mathbb{R}^{m\times n}$ of geldt in elke vectorruimte $\mathbb{R},V,+$ dat $0\cdot\vec{v} = \vec{0}_V$, en $-1\cdot\vec{v} = -\vec{v}$? En zo ja, hoe volgt dit dan uit de acht axioma's voor vectorruimten? Ik beweer niet dat dit *boeiende* materie is, maar voor 16- of 17-jarige leerling-wiskundigen zijn dit nieuwe soorten vragen. De bijbehorende bewijsjes kunnen hen een glimp geven van wat wiskundig exact redeneren inhoudt. Het zijn kleine puzzeltjes die ze aan de hand van hoogstens acht verschillende blokjes en enkele nieuwe spitsvondige techniekjes moeten leren leggen. Het is formele problem solving.

Dat er spitsvondigheid nodig is, blijkt uit het onderstaande bewijs.

Eigenschap • Zij $\mathbb{R},V,+$ een vectorruimte en $\vec{v} \in V$. Dan is $0\cdot\vec{v} = \vec{0}_V$.

Bewijs

$$\begin{aligned}
& \vec{v} = 1\cdot\vec{v} && (8)\\
\Rightarrow\quad & \vec{v} = (1+0)\cdot\vec{v}\\
\Rightarrow\quad & \vec{v} = 1\cdot\vec{v} + 0\cdot\vec{v} && (6)\\
\Rightarrow\quad & \vec{v} = \vec{v} + 0\cdot\vec{v} && (8)\\
\Rightarrow\quad & -\vec{v}+\vec{v} = -\vec{v} + (\vec{v} + 0\cdot\vec{v})\\
\Rightarrow\quad & -\vec{v}+\vec{v} = (-\vec{v}+\vec{v}) + 0\cdot\vec{v} && (1)\\
\Rightarrow\quad & \vec{0}_V = \vec{0}_V + 0\cdot\vec{v} && (3)\\
\Rightarrow\quad & \vec{0}_V = 0\cdot\vec{v} && (2)
\end{aligned}$$

Zoals hierboven vermeld, is zo'n bewijs nogal gekunsteld en niet meteen boeiend. En toch... In mijn ingenieursstudies is mij niet geleerd om stil te staan bij de algemene geldigheid van deze en vergelijkbare eigenschappen; wij bleven in concrete verzamelingen opereren, waar ze triviaal

waren. Voor veel leerlingen zijn deze bewijsjes dus mogelijk een unieke gelegenheid om met andere ogen naar bepaalde eigenschappen te leren kijken, om te leren dat je het idee van '0 als opslorpend element' niet zomaar intuïtief naar elke nieuwe situatie mag overhevelen, maar het moet dubbelchecken op basis van de axioma's van die nieuwe omgeving. Je ontdekt niets verrassends, maar leert een nieuwe houding aan te nemen ten aanzien van evidente rekenregels. De wiskunde als kunst van het 'wis en zekere'. Het is een houding die ik als ingenieur zelf heb moeten leren aannemen toen ik wiskundeleerkracht werd en dat zal voor de talrijke niet-wiskundemasters in ons onderwijs vaak niet anders zijn.

Uit de volgende tabel bewees ik meestal nog één of twee eigenschappen. Voor het overige diende ze als geruststelling: deze rekenregels die we kennen uit concrete vectorruimten blijken algemeen geldig.

Eigenschappen • Gegeven is een vectorruimte $\mathbb{R},V,+,$ met $\vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V$ en $r \in \mathbb{R}$. Dan geldt:

1. $\vec{u}+\vec{v}=\vec{w}+\vec{v} \Rightarrow \vec{u}=\vec{w}$ (schrappingswet)
2. $r \cdot \vec{0}_V = \vec{0}_V$
3. $r \cdot \vec{v} = \vec{0}_V \iff r=0$ of $\vec{v}=\vec{0}_V$
4. $(-1)\cdot\vec{v} = -\vec{v}$
5. $(-r)\cdot\vec{v} = -(r\cdot\vec{v}) = r\cdot(-\vec{v})$

Tot slot nog een kleine anekdote die aantoont dat de bewijzen van die kleine eigenschapjes toch verraderlijk kunnen zijn. Ooit had ik het idee om de eigenschap $0\cdot\vec{v}=\vec{0}_V$ als volgt te bewijzen:

Een fout bewijs •

$$\begin{aligned} & \vec{v} = 1\cdot\vec{v} && (8)\\ \Rightarrow\quad & \vec{v} = (1+0)\cdot\vec{v} &&\\ \Rightarrow\quad & \vec{v} = 1\cdot\vec{v}+0\cdot\vec{v} && (6)\\ \Rightarrow\quad & \vec{v} = \vec{v}+0\cdot\vec{v} && (8) \end{aligned}$$

Aangezien het neutraal element uniek is, is $0\cdot\vec{v}=\vec{0}_V$.

Dat was eigenlijk wat te kort door de bocht. Zie je het ook?

Ik had toen een heel getalenteerde leerling in de klas, die meteen nattigheid voelde. Hij vroeg voorzichtig of ik daarmee niet enkel had aangetoond dat $0\cdot\vec{v}$ een soort 'neutraal element voor $\vec{v}$' is, maar niet voor elk element van V: zal ook gelden dat $\vec{w}+0\cdot\vec{v}=\vec{w}$ voor elke $\vec{w}\in V$? Dat is vereist om onder die uniciteitseigenschap te vallen. Het cruciale stukje bewijs dat ik had weggelaten toont net aan dat als je 'neutraal element voor één element' bent, je automatisch het unieke neutraal element voor alle elementen van de vectorruimte bent.

Zwemmen of verzuipen

Na de basiseigenschappen kwam het zware deel van de leerstof. Er werden verschillende nieuwe definities aangebracht, elk gevolgd door bijbehorende eigenschappen en stellingen, die telkens bewezen werden.

Zo wordt het begrip deelruimte gedefinieerd, gevolgd door een deelruimtecriterium.

Stelling • **Criterium voor deelruimten**

Zij $\mathbb{R},V,+$ een vectorruimte en W een niet-lege deelverzameling van V, dan zijn de volgende uitspraken equivalent:

1. $\mathbb{R},W,+$ is een deelruimte van $\mathbb{R},V,+$
2. $\forall\vec{u},\vec{v}\in W:\vec{u}+\vec{v}\in W$ en $\forall r\in\mathbb{R},\forall\vec{u}\in W: r\cdot\vec{u}\in W$
3. $\forall r,s\in\mathbb{R},\forall\vec{u},\vec{v}\in W: r\cdot\vec{u}+s\cdot\vec{v}\in W$

Het cruciale begrip lineaire combinatie wordt gedefinieerd, met in haar kielzog het begrip opspanning. Voor dat laatste koos ik er altijd voor om me te beperken tot opspanningen van eindige deelverzamelingen. Daarmee bleef de behandeling beperkt tot eindig-dimensionale vectorruimten. Het hield de verdere begrippen, redeneringen en bewijzen iets eenvoudiger.

Definitie • **Opspanning**

Zij D een eindige deelverzameling van een vectorruimte $\mathbb{R},V,+$.
De opspanning van D, notatie $\operatorname{Span} D$, is de verzameling van alle lineaire combinaties van D.

Met het deelruimtecriterium kan gemakkelijk bewezen worden dat zo'n opspanning altijd een deelruimte is. Die deelruimte kan V zelf zijn.

Definitie • Voortbrengend deel

Zij D een eindige deelverzameling van een vectorruimte $\mathbb{R},V,+$.
D is een voortbrengende verzameling of voortbrengend deel van V a.s.a. $\operatorname{Span} D = V$.
De elementen van D noemen we voortbrengende vectoren van V.

Vanaf hier begint de zoektocht naar een minimale verzameling die de hele vectorruimte voortbrengt. Die vereist de fundamentele begrippen van lineaire afhankelijkheid en onafhankelijkheid.

Voor de definitie van lineair (on)afhankelijke vectoren zijn er verschillende mogelijkheden. Ik gebruikte de volgende.

Definitie • Lineair (on)afhankelijke vectoren

Zij $D = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ een eindige deelverzameling van een vectorruimte $\mathbb{R},V,+$.

- D is lineair onafhankelijk a.s.a:

$$k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \cdots + k_p\vec{v}_p = \vec{0}_V$$
$$\Downarrow$$
$$k_1 = k_2 = \cdots = k_p = 0$$

- D is lineair afhankelijk a.s.a D niet lineair onafhankelijk is. Dit betekent:

$$\text{er bestaan } k_1, k_2, \ldots, k_p \in \mathbb{R}, \text{ niet alle nul,}$$
$$\text{waarvoor } k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \cdots + k_p\vec{v}_p = \vec{0}_V$$

Met die definitie kan vervolgens een criterium voor lineaire (on)afhankelijkheid bewezen worden.

Stelling • Criterium voor lineaire afhankelijkheid

Zij D een eindige deelverzameling van een vectorruimte $\mathbb{R},V,+$.
D is lineair afhankelijk a.s.a. minstens één vector van D te schrijven is als een lineaire combinatie van de andere vectoren.
In symbolen:

$$D \text{ is lineair afhankelijk}$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists \vec{v} \in D : \vec{v} \in \operatorname{Span}(D \setminus \{\vec{v}\})$$

Uit het criterium volgt dat een verzameling D lineair onafhankelijk is wanneer geen enkele vector als lineaire combinatie van de andere vectoren van D geschreven kan worden. Dat 'vrij zijn' van dergelijke afhankelijkheden tussen vectoren verklaart waarom een lineair onafhankelijke verzameling ook een vrij deel wordt genoemd.

Tijdens het schrijven van deze loep kwam de vraag waarom ik die volgorde heb gekozen. Het criterium sluit immers beter aan bij het concept van afhankelijkheid: een vector 'hangt af' van de andere. In dat opzicht zou het conceptueel logischer zijn het criterium hierboven als definitie te gebruiken, waardoor de definitie hierboven een criterium of eigenschap wordt. Zelf heb ik er geen sterke mening over en ik zou morgen met evenveel plezier de omgekeerde aanpak opnieuw proberen. Vermoedelijk wou ik, toen ik vele jaren geleden mijn cursus uitwerkte, die omschrijving die later voortdurend wordt gebruikt in bewijzen, als definitie meegeven, om die het grootste gewicht te geven. Maar er valt veel voor te zeggen om het omgekeerd te doen.

Terug naar de leerstof. Nu kunnen vrije, niet-voortbrengende delen uitgebreid worden en toch vrij blijven, en niet-vrije, voortbrengende delen uitgezuiverd worden en toch voortbrengend blijven.

Stelling • Uitbreiden van een vrij deel

Zij D een eindige deelverzameling van een vectorruimte $\mathbb{R},V,+$.
Als D lineair onafhankelijk is en $\vec{v}$ is een vector van V met $\vec{v} \notin \operatorname{Span} D$, dan is $D \cup \{\vec{v}\}$ nog steeds lineair onafhankelijk.

Stelling • Verkleinen van een voortbrengend deel

Zij D een eindige deelverzameling van een vectorruimte $\mathbb{R},V,+$.
Als D een voortbrengend deel van V is en $\vec{v}$ is een vector van D met $\vec{v} \in \operatorname{Span}(D \setminus \{\vec{v}\})$, dan is $D \setminus \{\vec{v}\}$ nog steeds een voortbrengend deel van V.

Hier aangekomen, wordt het interessant op zoek te gaan naar een deelverzameling D die tegelijkertijd voortbrengend en lineair onafhankelijk is, door het toevoegen of verwijderen van de juiste vectoren. Zo'n deelverzameling wordt een basis genoemd. Gezien de opbouw van de cursus hebben we het hier over eindige basissen.

Ook voor dit begrip is er een criterium.

Stelling • Criterium voor basis

Zij D een eindige deelverzameling van een vectorruimte $\mathbb{R},V,+$.

D is een basis van V

$\Updownarrow$

elke vector van V is op precies één manier te schrijven als lineaire combinatie van D

Dat criterium liet me toe de laatste stelling uit mijn cursus te bewijzen, namelijk dat alle basissen van een vectorruimte evenveel elementen hebben. Dat aantal noemen we de dimensie van de vectorruimte.

Stelling • Dimensiestelling (Steinitz-Grassmann)

Zij $B_1 = \{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_p\}$ en $B_2 = \{\vec{w}_1,\vec{w}_2,\ldots,\vec{w}_q\}$ twee basissen van een vectorruimte V, dan is $p = q$.

Vrij snel is het bewijzen van elke eigenschap een deel van de ingesteldheid geworden, al is het bij sommige leerlingen eerder een fatalistische overgave. Dat laatste zag ik niet per sé als een probleem: het moeten doorbijten en zwoegen op zware bewijzen is een voorwaarde om het gevoel van zegevieren te kunnen ervaren wanneer de moeilijke materie eindelijk overwonnen werd. Net zoals een Mont Ventoux geen 50 kilometer lang mag zijn, mag dergelijke leerstof geen maanden duren. Maar een stevig stukje theorie, niet noodzakelijk lang, maakt deel uit van een wiskundige vorming.

Het relatief grote aantal bewijzen is bovendien een derde potentieel voordeel van de rigoureuze aanpak. Heel vaak bevatten onze leerstofonderdelen slechts één bewijs of enkele bewijzen. Daardoor kunnen leerlingen ze zonder veel begrip uit het hoofd leren, of zelfs helemaal niet leren wegens toch relatief onbelangrijk voor hun score op een toets of examen. Naarmate het aantal bewijzen toeneemt, worden leerlingen echter gedwongen om ze anders te gaan studeren: zoeken naar kapstokken, ontdekken welke redeneringen gewoon logisch uit de vorige volgen en dus niet uit het hoofd geleerd moeten worden, letten op de grotere structuur van een lang bewijs, evenals de paar bijzondere overgangen. Bovendien maken bewijzen bij zulke leerstof een groot deel van de punten uit.

Verder wordt het na een tijdje ook mogelijk om deze wiskundig sterke leerlingen te vragen zelf eenvoudige, nieuwe eigenschappen aan te tonen: de technieken uit de diverse eerdere bewijzen vormen een gereedschapskist waaruit ze zelf moeten kiezen. Het zelf vinden van een nieuw bewijs is in die fase van hun vorming altijd een bron van verbazing en trots.

Voorbeelden van dergelijke eigenschappen zijn:

- Zij $\mathbb{R},V,+$ een vectorruimte en D_1 en D_2 twee niet-lege eindige deelverzamelingen van V, waarbij $D_1 \subseteq D_2$. Als D_2 lineair onafhankelijk is, dan is ook D_1 lineair onafhankelijk.
- Zij $\mathbb{R},V,+$ een vectorruimte en D_1 en D_2 twee niet-lege eindige deelverzamelingen van V. Als D_1 lineair afhankelijk is, dan is $D_2 = D_1 \cup \{\vec{v}\}$, met $\vec{v} \in V$, ook lineair afhankelijk.
- In een n-dimensionale vectorruimte met $n \geqslant 1$ geldt dat elk voortbrengend deel minstens n vectoren bevat.

Abstract afwisselen met concreet

Ondanks de hierboven vermelde voordelen brengt de abstracte, rigoureuze aanpak ook uitdagingen met zich mee. Niet elke leerling is even wiskundig aangelegd en de abstracte formuleringen en zware notaties (lineaire combinaties, indices, eventueel sommatietekens...!) kunnen het inzicht bemoeilijken en diepgaand begrip van de onderliggende concepten en redeneringen verhinderen. Dit kan demotiverend werken.

Het is daarom belangrijk om nieuwe definities en eigenschappen telkens concreet te maken, en dat ook als leerstrategie mee te geven, aan de hand van gekende verzamelingen:

- Is $-12+2x-5x^2 \in \text{Span}\{-2+2x-x^2,5+2x^2,3+2x+x^2\}$?
- Is $\{(1,2,1),(2,1,4),(3,3,5)\}$ een voortbrengend deel van $\mathbb{R}^3$?
- Is $\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\5\\-1\end{bmatrix}\right\}$ lineair onafhankelijk?

Dergelijke oefeningen geven aanleiding tot eenvoudige berekeningen en redeneringen, die de abstracte definities en eigenschappen geleidelijk

aan verduidelijken. Bovendien ontdekken leerlingen dat dergelijke vraagstukken telkens resulteren in lineaire stelsels, waarbij het aantal onbekenden, vergelijkingen of oplossingen verband houden met voortbrengendheid en lineaire (on)afhankelijkheid.

Ze zijn niet alleen voor iedereen nuttig om de leerstof beter te begrijpen, voor de minder sterke leerling bieden ze ook wat perspectief voor de toets of het examen.

Evaluatie

Op elke toets of examen vroeg ik, naast oefeningen zoals hierboven, enkele geziene bewijzen. Als ondersteuning kregen mijn leerlingen de lijst met alle eigenschappen, met dezelfde nummering als in de cursus: dat liet hen toe om naar andere eigenschappen te verwijzen aan de hand van hun nummer: "*Wegens eigenschap 13 kunnen we hieruit besluiten dat...*".

Ik gebruikte deze bewijzen-intensieve cursus ook om mijn leerlingen te leren dat de beste taal om een wiskundige stelling te bewijzen meestal het Nederlands is: vloeiende zinnen in plaats van louter wiskundige symbolen. We hebben in het secundair onderwijs de m.i. wat ongelukkige gewoonte ontwikkeld om bewijzen neer te schrijven als een compacte reeks pseudo-logische uitspraken met implicatie- of equivalentiepijlen ertussen en minimale tekst. Soms zelfs geen tekst. Alles zit in de symbolen, is de boodschap. Kijk eens hoe beknopt de wiskundetaal is! Alleen ben je als leerkracht niet zeker dat de leerling die taal begrijpt, zelfs wanneer de symbolen juist worden gereproduceerd. Als kind leerde je misschien ook ooit een gedicht in een vreemde taal vanbuiten: correcte reproductie, maar je snapte er geen jota van. Vandaar: zoveel mogelijk noteerde ik de redenering in doorlopende zinnen. Ik verwachtte daarom ook dat op evaluaties de redeneringen op een heldere manier werden uitgeschreven, afgewisseld met notaties in symbolen waar nodig of wenselijk. (Merk op dat in de kleine eerste bewijsjes, zoals van $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}_V$, een bewijs wel beter met symbolen wordt genoteerd. Het is geen wit-zwart-verhaal.)

Opvallend was dat het klasgemiddelde voor deze moeilijke materie vaak hoger was dan voor de reguliere leerstof. Uiteindelijk maken de talrijke bewijzen de evaluatie een stuk voorspelbaarder. Ik beken dat ik bewust niet overdreef met de moeilijkheid: ik wou vermijden dat leerlingen dergelijke abstracte aanpak zouden associëren met onhaalbaar moeilijk. Stiekem wou ik toch promotie maken voor die manier van werken. In onze 8u-cursus zaten nog zulke onderdelen: dan kun je er beter voor zorgen dat de eerste ervaring een voldoende positieve nasmaak achterlaat.

Niet enkel vectorruimten

In het vijfde jaar behandelden we ook een stukje getallenleer: deelbaarheid in $\mathbb{Z}$ en modulorekenen. Dit kon op veel bijval bij de leerlingen rekenen, al werd het ook rigoureus opgebouwd. Getallen zijn concreter dan vectoren, natuurlijk. De notaties en redeneringen in de bewijzen zijn minder nieuw. De cursus werd gekoppeld aan cryptografie en eindigde met het voor leerlingen indrukwekkende bewijs van het RSA-algoritme.

In het zesde jaar kwam dan een kennismaking met groepentheorie, gebaseerd op het SOHO-boekje met die naam ((bibliografie)). Daar investeerde ik toch ook een 20-tal lessen in. Ook daar lag de klemtoon op het opbouwen van goede bewijzen, uitgeschreven in doorlopende zinnen.

Voor veel leerlingen bleven de vectorruimten echter het meest indrukwekkende dat ze in de lessen wiskunde hadden beleefd. Alle begin is moeilijk. En een moeilijk begin laat vaak een heroïsche herinnering na.

3 Vanuit zelfstandig onderzoeken

We lazen in deze loep verschillende methodes om vectorruimten te introduceren. Als eerste was er een concrete, gestuurde (klassieke) aanpak in paragraaf 1 waar de leerkracht vanuit een selectie goedgekozen (tegen)voorbeelden zelf vectorruimten introduceert met aandacht voor het meetkundige aspect. Ten tweede hadden we een axiomatische, formele aanpak in paragraaf 2 waar de vectorruimten als puur symbolisch object binnenvallen om leerlingen in aanraking te brengen met abstracte wiskunde. Nu gaan we in op een aanpak die we terugvonden in de vakdidactische literatuur. Daarin wordt gebruik gemaakt van open problemen om vectorruimten aan te brengen, en de bijhorende concepten te introduceren. Daarbij gaan leerlingen (grotendeels) zelfstandig op onderzoek. Op deze manier kunnen leerlingen ervaren wat het is om *zelf* wiskundige te zijn en nieuwe wiskunde uit te vinden. Het komt ook hun creativiteit en zelfstandigheid in het sturen van het leerproces ten goede.

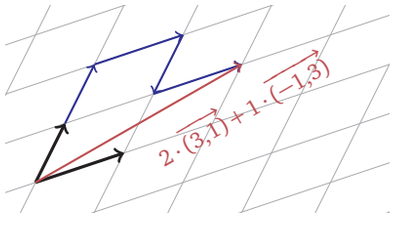
We werken in deze paragraaf concrete voorbeelden uit van zulke open problemen, die de aanleiding kunnen zijn voor het definiëren van vectorruimten, voortbrengende verzamelingen, basis, ... Ze vormen geen cursus noch leerlijn op zich, maar zijn bedoeld als inleidend groepswerk vóór je klassikaal een nieuw concept definieert, of als prikkelende huistaak ná de les. Beschouw het als een menu, waaruit je een boeiende oefening kunt kiezen als aanvulling op de cursus. Als je verder wil kijken naar de dessertkaart, met alternatieve probleemcontexten om vectorruimten te introduceren, dan kun je in (Trigueros & Wawro, 2020) en (Stewart e.a., 2019) een overzicht vanuit de literatuur terugvinden.

We stelden deze lesmaterialen op in Ximera, een vernieuwend pakket van LaTeX. Concreet betekent dit dat het lesmateriaal zowel als interactieve website beschikbaar is (op https://wiskunde.opmaat.org/uitwiskeling), maar ook als gedrukt document (downloadbaar via pdf op diezelfde website). In dit deel van de loep tonen we de grote lijnen van het materiaal, met tussengevoegde uitleg en uitgelichte oefeningen.

3.1 Lineaire combinaties, lineaire onafhankelijkheid en voortbrengend deel

Vooraleer we aan de definitie van een vectorruimte toe zijn, laten we de leerlingen eerst aan den lijve ervaren wat het is om zelf zo'n (nog niet als zodanig benoemde) vectorruimte te maken. Dat houdt in dat leerlingen zelf lineaire combinaties knutselen van concrete vectoren, zich afvragen welke plaatsen in $\mathbb{R}^2$ bereikbaar zijn met dergelijke lineaire combinaties, om dan af te sluiten met de invloed van lineaire (on)afhankelijkheid op de bereikbare plaatsen. Daarvoor kun je gebruikmaken van de "Taak van het magische tapijt", die we overnemen uit het online beschikbare, Amerikaanse onderzoeksproject "Inquiry-Oriented Linear Algebra (IOLA)"(Wawro e.a., 2013). Dit project wordt ontwikkeld voor het Amerikaanse hoger onderwijs, waar studenten voor de eerste keer met abstracte structuren in aanraking komen (wat wij in Vlaanderen al deels in het middelbaar zien). Je zal dan ook zien dat de "Taak van het magische tapijt", zoals ook andere taken van (IOLA), weinig wiskundige voorkennis veronderstelt, maar wel tot boeiende leerervaringen komt met de betekenis van een 'vectorruimte'.

Concreet onderzoeken leerlingen in de "Taak van het magische tapijt" twee verschillende vervoersmiddelen: *een hoverboard dat altijd in richting* (3,1) *beweegt en een magisch tapijt dat altijd in richting* (1,2) *vliegt. Kunnen ze met die vervoersmiddelen hun oom Gauss bezoeken, die woont op* (107,64)*?* Dat is de vraag die leerlingen zelf ontrafelen met de op-een-gepast-moment geïntroduceerde definities van de leerkracht. Het verhaaltje van het magisch tapijt en de hoverboard is hier natuurlijk enkel om het geheel in te kaderen; de essentie is dat leerlingen met concrete vectoren (zowel op een tekening als algebraïsch) puzzelen om de vraag te kunnen beantwoorden. Daarbij zullen ze bijvoorbeeld zelfstandig lineaire combinaties gebruiken en biedt de context de mogelijkheid om een rijk beeld van een "lineaire combinatie" te vormen. In Figuur 3 zie je een voorbeeld van een eerste mogelijk pad dat een leerling kan opschrijven, en hoe je het kan herschrijven als een klassieke lineaire combinatie.



Figuur 3 *– Een mogelijk pad met de vervoersmiddelen, en herschrijven als lineaire combinatie.*

Het begrip van "lineaire combinatie" wordt onmiddellijk ook uitgediept door de leerlingen zelf: welke coëfficiënten mogen gebruikt worden? Kan je altijd zo hercombineren? ... Nog voor je de definitie van een lineaire combinatie geeft, hebben ze dus eigenlijk al een diep beeld van dat begrip!

Verder op hun pad veralgemenen ze hun bevindingen naar $\mathbb{R}^3$ en eindigen ze met het zelfstandig opstellen van (tegen)voorbeelden van lineair (on)afhankelijke verzamelingen in $\mathbb{R}^n$. Naar die voorbeelden kunnen ze verder in de lessenreeks teruggrijpen wanneer extra definities geïntroduceerd worden. Concreet vullen de leerlingen in onderstaande Tabel 1 een specifieke verzameling in per cel (of vullen ze "onmogelijk" in). We vulden in het rood al enkele cellen in ter illustratie. Bijkomend kan je je leerlingen ook vragen om expliciet uit te leggen welke andere voorbeelden nog mogelijk zijn, of waarom geen voorbeelden mogelijk zijn.

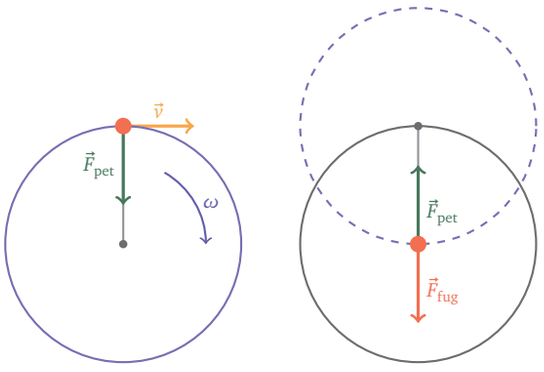
Beschrijving	Lineair afhankelijk	Lineair onafhankelijk
Een verzameling van 2 vectoren in $\mathbb{R}^2$	$\left\{ \begin{array}{c} (1,2) \\ (-2,-4) \end{array} \right\}$	
Een verzameling van 3 vectoren in $\mathbb{R}^2$		Onmogelijk
Een verzameling van 2 vectoren in $\mathbb{R}^3$		
$\vdots$		
Een verzameling van 1 vector in $\mathbb{R}^2$	$\{(0,0)\}$	

***Tabel 1** – Een in te vullen overzicht van lineair (on)afhankelijke verzamelingen. De laatste rij ter illustratie van de speciale status van $\vec{0}$, wat we aanraken in paragraaf 4.*

3.2 Basis en dimensie

Nadat de leerlingen intuïtie hebben opgebouwd rond lineaire onafhankelijkheid en voortbrengende verzamelingen, kunnen basissen in principe al gedefinieerd worden. Dat zijn dan simpelweg speciale verzamelingen die beide eigenschappen bezitten: zowel lineair onafhankelijk als voortbrengend voor een volledige ruimte. Allemaal goed en wel, maar waarom zouden zulke verzamelingen dan boeiend zijn? Leerlingen zijn hier volledig in hun recht om te reageren met “Who cares?”. Er is namelijk al een perfecte basis binnen bijvoorbeeld $\mathbb{R}^2$: hij is orthogonaal, genormeerd, … en hij wordt toch al standaard gebruikt. Dan spreken we natuurlijk over de aloude $\{(1,0),(0,1)\}$.

Één manier om het nut van een ‘basis’ als concept te kaderen, is door *verschillende* basissen te gebruiken. Laat ons als inleidend voorbeeld het ‘assenstelsel’ (ook wel het ‘referentiestelsel’) uit de fysica beschouwen. Het is pas als je je assenstelsel vastlegt (dus basisvectoren kiest) dat je problemen kan oplossen, en de keuze van assenstelsel kan de moeilijkheidsgraad van het probleem beïnvloeden. Als illustratie in Figuur 4 beschouwen we in bovenaanzicht een ronddraaiend balletje (rood) met een touwtje aan een ankerpunt (zwart). In de linkerfiguur leggen we de oorsprong op het ankerpunt en staat het assenstelsel vast op het aardoppervlak (niet getekend). In de rechterfiguur leggen we de oorsprong op het rode balletje zelf en draait het assenstelsel mee.



***Figuur 4** – De krachten bij een horizontaal ronddraaiend balletje (rood) in een stilstaand (links) en een meedraaiend (rechts) assenstelsel. De assen zelf staan niet aangeduid.*

In het stilstaand assenstelsel (links) heeft het balletje een veranderende snelheid. Volgens Newton moet er dan ook een kracht werken op het balletje dat die snelheidsverandering teweeg brengt, wat men de centripetale kracht $\vec{F}_{pet}$ noemt. In het meedraaiend assenstelsel (rechts) ligt het balletje stil en schijnt het ankerpunt rond te draaien. Om stil te kunnen liggen moeten volgens Newton de krachten op het rode balletje optellen tot nul. Dat verklaart waarom het balletje zowel een ‘fictieve’ centrifugale kracht $\vec{F}_{fug}$ als een centripetale kracht voelt. De verschillende assenstelsels (basissen) geven een verschillend antwoord voor de positie en baan van het rode balletje, maar zijn elk nuttig om de centrifugale kracht uit te leggen. Basissen (of dus assenstelsels in de fysica) zijn pas nuttig, als je er verschillende kan hebben.

Het nut van basissen kan ook bij leerlingen binnenkomen, en zelfs zonder de fysica-elementen. We pasten hiervoor een bestaande oefening uit het Amerikaanse IOLA-project aan (Wawro e.a., 2013). Zoals gezegd, vind je de volledige oefening op https://wiskunde.opmaat.org/uitwiskeling. In deze oefening gebruiken de leerlingen twee verschillende basissen voor $\mathbb{R}^2$, stellen ze een matrix op om van de ene naar de andere basis over te schakelen, en benoemen ze expliciet het voordeel van een andere basis te gebruiken. We hernemen het verhaal van het magische tapijt, maar je kan dit ook anders inkaderen.

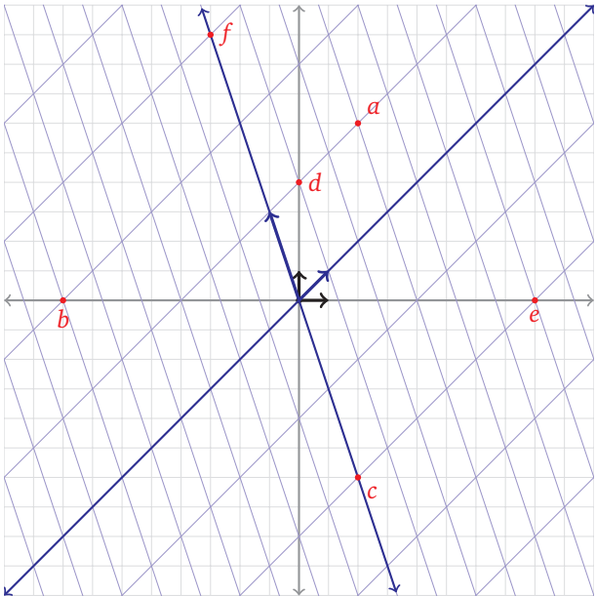
LESACTIVITEIT

Op verkenning met verschillende coördinatenstelsels

Zoals in de "Taak van het magische tapijt" gebruiken we twee vervoersmiddelen, maar met twee andere richtingen deze keer:

- **Hoverboard**: We duiden de beperking van de beweging van het hoverboard aan met de vector $\overrightarrow{(1,1)}$. Hiermee bedoelen we dat als het hoverboard één uur "vooruit" zou bewegen, het langs een "diagonaal" pad zou bewegen dat zou resulteren in een verplaatsing van 1 kilometer naar het oosten en 1 kilometer naar het noorden van zijn startlocatie.
- **Magisch tapijt**: We duiden de beperking van de beweging van het magische tapijt aan met de vector $\overrightarrow{(-1,3)}$. Hiermee bedoelen we dat als het magische tapijt één uur "vooruit" zou bewegen, het langs een "diagonaal" pad zou bewegen dat zou resulteren in een verplaatsing van 1 kilometer naar het westen en 3 kilometer naar het noorden van zijn startlocatie.

Hieronder vind je de kaart met zes locaties die je moet bezoeken: a, b, c, d, e en f. In het zwarte coördinatenstelsel worden de standaardeenheden gebruikt (1 km naar het oosten is $+1$ in de x-richting, 1 km naar het noorden is $+1$ in de y-richting).



1 Schrijf de coördinaten van elk van de bovenstaande punten ten opzichte van zowel het blauwe als het zwarte coördinatenstelsel.

✔ *Bijvoorbeeld punt a heeft coördinaat* (2,6) *in het zwarte stelsel en* (3,1) *in het blauwe stelsel. Punt b heeft coördinaat* (−8,0) *in het zwarte stelsel en* (−6,2) *in het blauwe stelsel.*

2 Wat is de meeteenheid van het blauwe assenstelsel? Waarvoor staat bijvoorbeeld coördinaat (3,1)?

✔ *De vectoren* $\overrightarrow{(1,1)}$ *en* $\overrightarrow{(-1,3)}$ *vormen de basis van het blauwe assenstelsel, en zijn gemeten in kilometer per uur. Coördinaat* (3,1) *wordt gemeten in uur: 3 uur met het hoverboard, en 1 uur met tapijt. Opgepast, die uren kunnen ook negatief zijn: dan gebruik je het vervoersmiddel achterwaarts.*

3 Bepaal een matrix die coördinaten ten opzichte van het blauwe coördinatenstelsel omzet naar coördinaten in het zwarte coördinatenstelsel.

✔ *Om van blauw naar zwart om te zetten, vermenigvuldig je de coördinaat met de matrix* $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Je kan hier enkele hints voorzien voor de leerlingen, door bijvoorbeeld een concreet voorbeeld uit te rekenen.

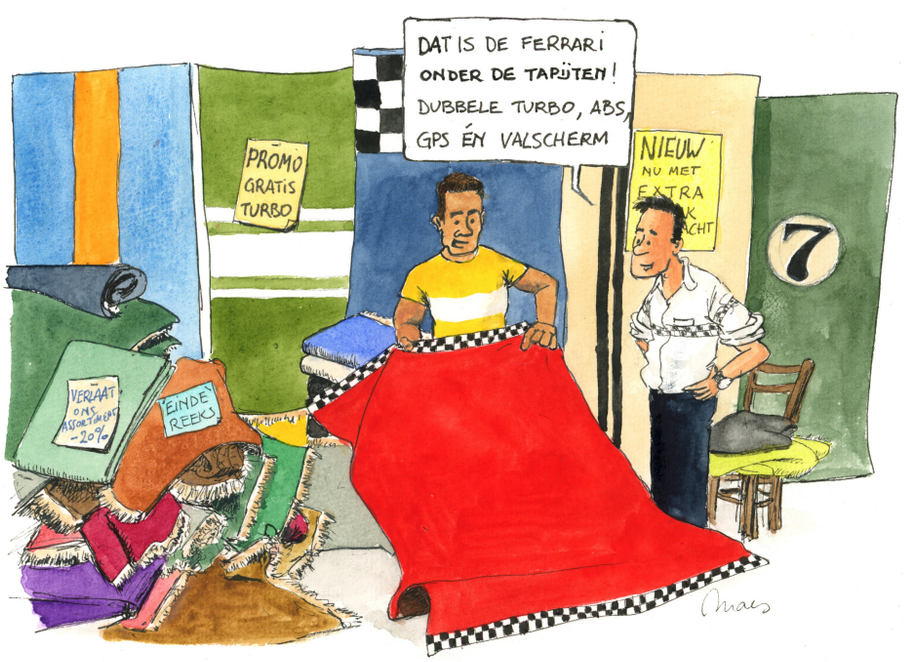
4 Bepaal ook een matrix die coördinaten ten opzichte van het zwarte coördinatenstelsel omzet naar coördinaten in het blauwe coördinatenstelsel.

✔ *Om van zwart naar blauw om te zetten, vermenigvuldig je de coördinaat met de inverse van die matrix, namelijk* $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

5 Gebruikmakend van de blauwe coördinaten, hoeveel tijd neemt het in totaal in beslag om de volgende route af te leggen: $a \to b \to c$?

✔ *De blauwe coördinaten van de punten zijn:* $a : (3,1)$, $b : (-6,2)$, $c : (0,-2)$. *De verplaatsing van* a *naar* b *is:* $(-6,2)-(3,1)=(-9,1)$. *Dit betekent dat je 9 uur achteruit op het hoverboard moet en 1 uur vooruit op het magische tapijt. De verplaatsing van* b *naar* c *is:* $(0,-2)-(-6,2)=(6,-4)$. *Dit betekent dat je 6 uur vooruit op het hoverboard moet en 4 uur achteruit op het magische tapijt. Alles samengenomen duurt de route 20 uur.*

Door basissen onmiddellijk te introduceren met hun praktisch nut ontlok je van leerlingen ook niet de vraag “waarom dit belangrijk is”. In hun eigen onderzoek hebben ze immers net doorleefd dat het omzetten van basis problemen kan vereenvoudigen. Je kan bovenstaande oefening eventueel nog uitbreiden, bijvoorbeeld door je leerlingen een expliciete formule te laten opstellen voor de reistijd van punten (x_1, y_1) naar (x_2, y_2) in het zwarte coördinatenstelsel.



3.3 Deelruimten (en vectorruimten)

In de voorgestelde leeractiviteiten hebben we tot nog toe vectorruimten nog niet gedefinieerd. Dat was op zich ook niet nodig: alle activiteiten steunden op reeds aanwezige kennis van $\mathbb{R}^n$ en 'vectoren' (als pijlen). Ook de concepten van 'lineaire onafhankelijkheid', 'voortbrengende verzameling' en 'basis' kunnen binnen die context gedefinieerd worden, zonder noodzakelijkerwijs iets over vectorruimten an sich te zeggen. In het vervolg stellen we nu zelf een lesactiviteit voor om vectorruimten te introduceren, maar zoals gezegd bepaalt u zelf waar deze valt in de lessen over vectorruimten. Dat hoeft niet in het begin te zijn.

In paragraaf 1 werden de vectorruimten geïntroduceerd aan de hand van vele verschillende (tegen)voorbeelden, en het inzicht dat vele objecten binnen de wiskunde eenzelfde 'vectorruimte'-structuur hebben. Dat inzicht kwam dan grotendeels gestuurd vanuit de leerkracht zelf, waarna de verdere leidende vraag was "Wat zou een wiskundige nu onderzoeken?". In paragraaf 2 kwamen de vectorruimten puur naar voren vanuit de formele axioma's, als bijna volledig symbolisch object, en werd er eventueel later nog de link gemaakt naar concrete voorbeelden. Wij maken in deze paragraaf de keuze van de middenweg: niet vele voorbeelden en ook niet geen voorbeelden, maar 1 sprekend voorbeeld om vectorruimten te introduceren.

We maken daarvoor gebruik van 'magische vierkanten'. Dat zijn vierkanten waar iedere cel ingevuld wordt met de getallen 1,2,...,n^2 , op een wel heel speciale manier. Bij iedere kolom, rij en beide diagonalen moet de som hetzelfde zijn. Die constante som noemen we dan ook de 'magische constante' C. Een typisch voorbeeld is onderstaand 3×3-vierkant met magische constante $C = 15$.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Deze magische vierkanten zijn al duizenden jaren gekend, in verschillende culturen wereldwijd en kregen occulte eigenschappen toegekend. In de moderne tijd worden ze veelal bestudeerd in de recreatieve wiskunde (Andrews, 1917), waarbij men zich bijvoorbeeld afvraagt: "Hoeveel dergelijke magische vierkanten zijn er?" en "Zijn er magische vierkanten die nog steeds magisch zijn, als je de buitenste rijen en kolommen verwijdert?" Om de brug naar vectorruimten te maken, beschouwen we hier echter magische vierkanten met getallen uit $\mathbb{R}$ in plaats van enkel $\mathbb{N}$. We houden het in dit verhaal in eerste instantie op 3×3-vierkanten voor de behapbaarheid. De vierkanten hieronder zijn in ons perspectief ook magisch.

0.5	-1	2
2	0.5	-1
-1	2	0.5

0	$-3\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$
$3\sqrt{2}$	0	$-3\sqrt{2}$
$-3\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	0

Het open probleem voor de leerlingen is vervolgens om zoveel mogelijk magische vierkanten van orde 3×3 te vinden. Mogelijks maken de leerlingen enkele concrete vierkanten of beseffen ze dat je een vierkant ook kan spiegelen en het nog steeds magisch blijft. Hoogstwaarschijnlijk zullen leerlingen echter teruggrijpen naar hun algebraïsche vaardigheden met stelsels van vergelijkingen. Het is daarbij niet de bedoeling dat leerlingen een volledige algebraïsche oplossingsverzameling opstellen voor de magische vierkanten, maar dat ze ervaren hoe onhandig dergelijke beschrijving is van de magische vierkanten. U beperkt dus best hun rekenwerk(pogingen) in de tijd, of neemt tijdig over met ICT. Magische vierkanten zien als een vectorruimte biedt ten slotte een mooie (en gemakkelijker veralgemeenbare) manier om dit probleem op te lossen.

De algebraïsche methode zou ongeveer als volgt gaan. Als je de getallen benoemt met $s_{ij} \in \mathbb{R}$ voor het getal in rij i en kolom j, dan ziet het magische vierkant er uit als:

s_{11}	s_{12}	s_{13}
s_{21}	s_{22}	s_{23}
s_{31}	s_{32}	s_{33}

De bijhorende vergelijkingen leveren het onderstaande (monster)stelsel op:

$$\begin{cases} s_{11}+s_{12}+s_{13} &= C \\ s_{21}+s_{22}+s_{23} &= C \\ s_{31}+s_{32}+s_{33} &= C \\ s_{11}+s_{21}+s_{31} &= C \\ s_{12}+s_{22}+s_{32} &= C \\ s_{13}+s_{23}+s_{33} &= C \\ s_{11}+s_{22}+s_{33} &= C \\ s_{13}+s_{22}+s_{31} &= C \end{cases}$$

Handmatig kan je wel nog nuttige vergelijkingen afleiden, bijvoorbeeld dat $s_{22} = \frac{C}{3}$, maar het lijkt

grotendeels ondoenbaar. Aan de hand van ICT kun je natuurlijk het stelsel rijreduceren, maar erg verhelderend is dat niet.

De methode met vectorruimten gaat anders verder. We willen zo veel mogelijk magische vierkanten beschrijven, en in een inleidende oefening hebben de leerlingen al 2 magische vierkanten gevonden. In plaats van ze allemaal in 1 formule te willen beschrijven, kunnen ze ook reeds verkregen magische vierkanten hercombineren tot nieuwe magische vierkanten. Stel dat M en N twee magisch vierkanten van orde 3×3 zijn. Dan zal $M+N$ ook een magisch vierkant zijn van dezelfde orde, alsook $k\cdot M$ voor een willekeurige $k\in\mathbb{R}$. De magische vierkanten gedragen zich met andere woorden net zoals de vectoren in het vlak; je kan ze optellen en uitrekken met een factor! De verzameling van magische vierkanten van orde 3×3, hier genoteerd als $\mathbb{M}^{3\times 3}$, vormt met de elementsgewijze optelling en scalaire vermenigvuldiging effectief een vectorruimte. Je kan zelf, of met de leerlingen, de andere voorwaarden nog controleren. Dat kan je als leerkracht ook inzien door in het vorige stelsel C weg te werken door substitutie. De magische vierkanten zijn dan precies de oplossingsverzameling van een homogeen lineair stelsel, en dus vormen ze een vectorruimte.

Op dit punt neem je best de leerlingen terug bij de hand, en geef je hun enkele magische vierkanten A, B en C cadeau. Zij moeten dan nog beargumenteren hoe je daarmee vele andere magische vierkanten kan bekomen (namelijk met de voortgebrachte ruimte van $\{A,B,C\}$). Een interessante keuze voor de gegeven magische vierkanten is de volgende:

$$A=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&1\\\hline 1&1&1\\\hline 1&1&1\\\hline\end{array}\qquad B=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&1&-1\\\hline -1&0&1\\\hline 1&-1&0\\\hline\end{array}$$

$$C=\begin{array}{|c|c|c|}\hline -1&1&0\\\hline 1&0&-1\\\hline 0&-1&1\\\hline\end{array}$$

We kozen hier deze vierkanten, omdat ze lineair onafhankelijk zijn, *en* de lineaire onafhankelijkheid valt ook te beargumenteren door de leerlingen zonder veel rekenwerk. Het open probleem is nu opgelost. Door getallen $x,y,z\in\mathbb{R}$ te kiezen, vind je met $xA+yB+zC$ altijd een magisch vierkant. We gaan daarbij nog niet zo ver om te stellen dat *ieder* magisch vierkant van orde 3×3 bereikt wordt; daarvoor kan je nog het algebraïsche stelsel met ICT uitwerken. Dat levert inderdaad een dimensie van 3. Los van het rekenwerk kan je dat ook intuïtief maken bij je leerlingen, door bijvoorbeeld het eerste magische vierkant te schrijven als $5A-B-3C$.

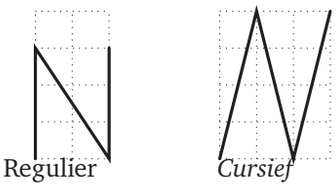
Met de magische vierkanten is er een begrijpbaar, maar voldoende exotisch voorbeeld van een vectorruimte om het concept te introduceren. Dat potentieel van magische vierkanten voor het onderwijzen van vectorruimten werd al eerder opgemerkt in de literatuur (Dorier, 2000; van Luijk, 2024), en ook in Uitwiskeling zelf in nummers 24/3 en 1/2. Merk tenslotte nogmaals een verschil op met de eerdere paragrafen. We positioneerden vectorruimten hier als een elegante manier om problemen op te lossen, eerder dan vanuit leerkrachtgekozen (tegen)voorbeelden of vanuit de formele axioma's de definitie op te leggen. De context van de magische vierkanten kan eventueel nog uitgebreid worden, om 'deelruimte' te introduceren. Zo vormen de magische vierkanten $\mathbb{M}^{3\times 3}$ een deelruimte van de klassieke vectorruimte van 3×3 matrices, maar hebben ze zelf ook nog een kleinere deelruimte, namelijk de magische vierkanten met magische constante 0. Om het abstracte begrip van een vectorruimte te vervolledigen kan het echter interessanter zijn om vervolgens de lijst van (tegen)voorbeelden uit paragraaf 1 aan de leerlingen voor te leggen.

3.4 Matrices als transformaties

In voorgaande paragrafen kwamen lineaire transformaties van vectorruimten nog niet aan bod. We gebruikten wel matrices om lineaire stelsels voor te stellen, of bijvoorbeeld lineaire onafhankelijkheid te controleren, en ook wel als concreet voorbeeld van een vectorruimte, maar nog niet om verschillende vectorruimtes met elkaar te linken. Om ook de brug te slaan met het hoger onderwijs, waar lineaire transformaties de hoofdbrok vormen van lineaire algebra, lijkt het gepast om toch wat aandacht te besteden aan dit onderwerp in het secundair onderwijs. Dat hoeft niet groot te zijn, maar kan als toepassing op de vroegere geziene matrixvermenigvuldiging. Meer specifieke voorkennis is ook niet vereist om de connectie te maken naar transformaties. We werkten een concrete voorbeeldactiviteit uit waarin leerlingen het vlak transformeren aan de hand van matrixvermenigvuldigingen.

Het open probleem is om getypte letters in lettertype `Regular` om te zetten naar *`Cursief`*. Daar-

voor beginnen ze van onderstaande tekening die een “N” weergeeft op een rooster.



De leerlingen stellen eerst zelfstandig een matrix op, bijvoorbeeld door variabelen a,b,c,d voor de elementen van de matrix te introduceren en een stelsel van vergelijkingen op te lossen. De gevonden transformatiematrix wordt vervolgens uitgesplitst in twee opeenvolgende stappen: eerst verticaal uitrekken, en vervolgens horizontaal scheeftrekken. Het vermenigvuldigen van matrices wordt expliciet gelinkt aan samenstellen van transformaties. Dat verklaart bovendien onmiddellijk waarom matrixvermenigvuldiging niet commutatief kan zijn; het samenstellen van transformaties in het vlak is dat ook niet! Roteren en verschuiven commuteren bijvoorbeeld ook niet. Na het opstellen van de transformatiematrix voor de letter “N” blijft nu nog de vraag voor je leerlingen: “Zou de letter ‘A’ een andere transformatiematrix hebben?”. In een korte berekening verifiëren ze dat ook voor andere letters, en zelfs gelijk welk punt in het vlak, dezelfde transformatiematrix geldt.

Je kan deze activiteit nog uitbreiden door ook andere transformaties te beschouwen (zoals rotatie, verschuiving, spiegeling, ...). Eventueel koppel je ook met deelruimten. Als een verzameling K punten in het vlak onveranderd blijft onder een lineaire transformatie A (met andere woorden $AK = K$), dan is K een deelruimte. In het voorbeeld daarnet is de horizontale lijn $y = 0$ onveranderd onder de transformatie, waardoor we onmiddellijk weten dat die lijn zelf een deelruimte is van het vlak. Met ‘je kan ... nog uitbreiden’ bedoelen we meer dan een vage mogelijkheid: jij, de lezer, kunt het gepresenteerde leermateriaal zelf bewerken en aanpassingen voor iedereen beschikbaar stellen. Op https://wiskunde.opmaat.org/uitwiskeling vind je de leermaterialen als website, maar op het online platform Github op https://github.com/opmaat/uitwiskeling vind je de broncode in LaTeX. De korte uitleg om zelf van start te gaan, vind je op https://github.com/XimeraProject/ximeraFirstSteps. Je zou bijvoorbeeld een oefening kunnen toevoegen waarin leerlingen het “$\forall$”-symbool proberen te maken met een transformatie van een gegeven “A”.

3.5 Nabeschouwing van onderzoekend leren

In deze paragraaf wilden we aantonen dat onderzoekend leren zeker mogelijk is bij het aanbrengen van vectorruimten. De bovenstaande leeractiviteiten over lineaire combinaties, basissen, het definiëren van vectorruimten en deelruimten, en matrixtransformaties zijn daar stuk voor stuk goede voorbeelden van. We willen deze paragraaf afsluiten met een laatste pleidooi om onderzoekende elementen op te nemen in je lessenreeks over vectorruimten.

We willen als leerkrachten allemaal leerlingen opleiden die actief betrokken zijn bij de leerstof, en in het ideale verhaal, leerlingen die zelf op zoek willen gaan naar ‘meer’ en het ‘waarom’. De fonkelende oogjes wanneer ze geïntrigeerd zijn (zelfs door abstracte wiskunde!) of de luide ‘AHA’-momenten wanneer ze zelf iets ontdekken, zijn goud waard. Meer zelfs, die onderzoekscompetenties zijn vaardigheden die de onderwijsdoelen expliciet vereisen, zoals onderwijsdoel 06.44 voor Wiskunde in de derde graad vermeldt: “De leerlingen voeren onderzoek aan de hand van een wetenschappelijke methode om kennis te ontwikkelen en om vragen te beantwoorden.” Laat ons het onderzoekend leren dan ook niet alleen reserveren voor de afgezonderde, lijvige onderzoeksprojecten, maar ook kleinschalig verweven in de dagdagelijkse lessen. Vectorruimten biedt daar de uitgelezen gelegenheid toe.

De leerlingen beschikken, zoals eerder aangehaald, ten eerste al over een uitgebreide voorkennis: axiomatische eigenschappen van optelling en vermenigvuldiging bij getallen, werken met pijlvectoren en werken met matrices en stelsels (eventueel zelfs ruimemeetkunde). Een gebrek aan voorkennis of vaardigheden zou het probleem niet mogen zijn bij onderzoekende leeractiviteiten voor vectorruimten.

Ten tweede worden de vectorruimten behandeld bij de oudste leerlingen van het middelbaar in de sterk wiskundige richtingen; een groep waarvan verwacht wordt dat een zekere wiskundige maturiteit en zelfsturing in het leerproces aanwezig is. Zelfs als die maturiteit nog niet aanwezig zou zijn, is dit het moment om in te zetten op zelfstandig onderzoeken en begrijpen van wiskundige concepten. Dat is een vaardigheid die broodnodig zal zijn in het snelvolgende hoger onderwijs met zijn abstracte hoorcolleges en (te) druk bezette oefenzittingen.

Er zijn natuurlijk ook mogelijke bezwaren tegen onderzoekend leren. Het vergt meer tijd, het vraagt meer voorbereidingswerk, het heeft minder kans op slagen bij zwakkere leerlingen, … Dat zijn allemaal terechte bedenkingen, en we onderschrijven die. Het is zeker niet onze intentie om onderzoekend leren als heilige graal voor te stellen. Daarom maakten we korte activiteiten, waaruit de lezer met zijn eigen expertise kan kiezen als uit een menukaart, en open-source gedeeld zodat je ze gemakkelijk kunt aanpassen aan je eigen klascontext. We stelden ze hier trouwens voor als inleidende activiteiten, maar niets houdt je tegen om ze als oefening te gebruiken nadat je via een andere aanpak de concepten definieerde in de klas. Het zou ons alleen jammer lijken om zo'n boeiend onderwerp als vectorruimten aan te brengen, maar geen ruimte te maken voor de zelfstandige experimenten van leerlingen met die vectoren…

4 Gekende problemen

We lijsten in deze paragraaf enkele concrete, gekende problemen op bij vectorruimten. Na ons lijstje nemen we een breder perspectief en kaderen we meer algemene problemen binnen in de vakdidactische theorie van de "drie werelden". Een eerste proever van de lijst gekende moeilijkheden is de speciale status van de nulvector $\vec{0}$. Typische fouten zijn ...

- ... denken dat de nulvector geen echte vector is (of eerder een punt of oorsprong van het assenstelsel), omdat die geen richting heeft. Bij oefeningen waar de vector $\vec{0}$ het eindantwoord is, vermoeden leerlingen onterecht dat ze een fout gemaakt hebben, of iets speciaals aangetoond hebben (zoals lineaire onafhankelijkheid) zelfs als dat niet het geval is. Construeer dus zeker ook enkele oefeningen waar het eindantwoord de nulvector is.
- ... denken dat iedere nulvector eruit moet zien als de klassieke $(0,0,\ldots,0)$. Jij kunt als leerkracht het voorbeeld uit paragraaf 1 nemen waarbij $\mathbb{R}^+$ uitgerust wordt met een andere optelling en scalaire vermenigvuldiging (en 1 de nulvector wordt)
- ... denken dat een verzameling zonder nulvector toch een deelruimte kan zijn (door niet alle voorwaarden te controleren). Een illustratief voorbeeld is het positieve halfvlak $\left\{(x,y)|x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_0^+\right\}$ met enkel strikt positieve scalairen. Dat is wel gesloten onder optelling en scalaire vermenigvuldiging, maar vormt geen deelruimte.
- ... niet beseffen dat verzamelingen met de nulvector sowieso lineair afhankelijk zijn. Een provocerende vraag voor je leerlingen is hier: is de verzameling $\{\vec{0}\}$ lineair onafhankelijk? En wat met $\{\vec{0}, \vec{v}\}$?

Een tweede veelvoorkomend probleem is het verwarren van verschillende gelijkaardig klinkende concepten. We geven je een lijstje van gelijkaardig klinkende termen met "lineair" in de naam: iets om met je leerlingen te delen of hen zelf te laten maken!

- Lineaire combinatie: een expressie van de vorm $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ of $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_n\vec{v}_n$, waarbij c_i getallen zijn, x_i onbekenden en $\vec{v}_i$ onbekende vectoren.
- Lineaire vergelijking: een vergelijking van de vorm $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = b$ of $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_n\vec{v}_n = b$, waarbij c_i en b getallen zijn, x_i onbekenden en $\vec{v}_i$ onbekende vectoren. Cruciaal is het een vergelijking (dus met een gelijkheidsteken), waarbij een lineaire combinatie gelijkgesteld wordt aan een ander getal of vector.
- Lineaire functie: een functie $f : V \to W$ die voldoet aan $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$ en $f(c\vec{x}) = cf(\vec{x})$ voor alle $\vec{x}, \vec{y} \in V$ en alle $c \in \mathbb{R}$.
- Lineaire afhankelijkheid: een verzameling vectoren $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ is lineair afhankelijk als er een niet-triviale, lineaire combinatie is die de nulvector oplevert. In symbolen: er bestaan scalairen $c_1, c_2, \ldots, c_n$, niet allemaal nul, zodat $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_n\vec{v}_n = \vec{0}$.
- Lineaire onafhankelijkheid: een verzameling vectoren $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ is lineair onafhankelijk als er geen 'boeiende' lineaire combinaties zijn die de nulvector opleveren. De enige oplossing van de vergelijking $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_n\vec{v}_n = \vec{0}$ is de triviale oplossing (alle $c_i = 0$).

De eerder besproken moeilijkheden zal je zeker tegenkomen in lessen over vectorruimten. Ze dringen echter nog niet door tot de essentie van wat er moeilijk kan gaan in het leren over vectorruimten. Daarom grijpen we terug naar het vakdidactisch onderzoek rond lineaire algebra, en geven we twee voorbeelden van zulke 'diepere' problemen.

Vakdidactisch onderzoek naar lineaire algebra (en dus vectorruimten) kwam pas in de jaren 1980 op gang. Vanuit Frankrijk kwam oorspronkelijk de kreet om meer onderzoeksaandacht te besteden

aan het universiteitsvak lineaire algebra: zelfs na verschillende lesmodules over het onderwerp hadden studenten nog steeds moeilijkheden met het vak (Dorier, 2000).

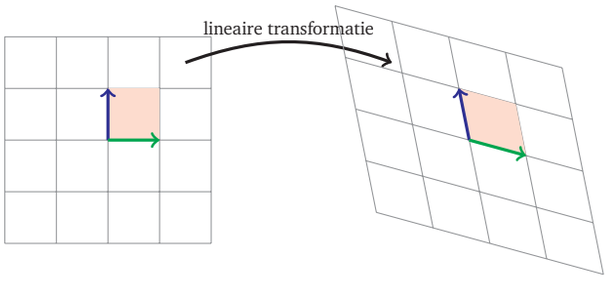
In de voorbije decennia werd effectief meer onderzoek verricht naar de typische problemen bij lineaire algebra, en één antwoord lijkt naar voren te komen: het coördineren van de verschillende 'werelden' van begrip bij vectorruimten stelt unieke uitdagingen die niet aanwezig zijn bij andere domeinen (Thomas & Stewart, 2011; Trigueros & Wawro, 2020). Met die verschillende werelden wordt bedoeld: de meetkundige (geometrische) wereld, de symbolische wereld en de formele wereld. Ieder concept van vectorruimten kan in al die werelden begrepen worden, maar de overgang gebeurt allerminst vanzelfsprekend. Het komt dan ook vaak voor dat een student vastloopt in één wereld, terwijl de rijkdom van vectorruimten net bestaat uit die verschillende werelden. Ook in het Vlaamse secundaire onderwijs is het wenselijk dat leerlingen niet vasthouden aan enkel de meetkundige betekenis, maar ook stappen naar de symbolische en de formele wereld zetten. We maken deze drie werelden concreet met enkele voorbeelden en eindigen met concrete adviezen over hoe je als leerkracht die werelden kunt coördineren in je lessen. Nuance is hier wel geboden: het hangt af van welke leerdoelen je voorop stelt. Als je vectorruimten invoert als puur abstracte algebraïsche structuur (zoals in paragraaf 2), speelt de meetkundige wereld een kleinere rol, wat normaal ook gereflecteerd wordt in een kleiner belang in de evaluaties.

4.1 De drie werelden

De eerste wereld is de meetkundige wereld. Daar bestudeert men vectoren als pijlen in een assenstelsel, en worden operaties zoals optellen en scalair vermenigvuldigen visueel voorgesteld. Vaak komt er een diagram aan te pas, en ook matrixtransformaties worden voorgesteld als meetkundige operaties op het volledige vlak of de ruimte. Je vindt in Figuur 5 een voorbeeld dat een lineaire transformatie visueel voorstelt.

Deze meetkundige wereld is vaak de eerste wereld die studenten leren kennen, omdat het visueel en intuïtief aanvoelt. Als je vectorruimten wilt bestuderen om te leren over een algebraïsche structuur, moet je echter ook de brug slaan naar de symbolische en formele wereld.

In de symbolische wereld worden vectoren en matrices voorgesteld met algebraïsche symbolen, vergelijkingen en rekenregels. Vectoren worden nu "$\vec{v}, \vec{w}$" in plaats van een tekening en matrices worden "A, B" in plaats van een visuele transformatie. De analytisch-meetkundige insteek, waarbij coördinaten toegekend worden aan iedere vector, zweeft ietwat op de grens tussen de meetkundige en symbolische wereld. Je gaat over van een specifieke tekening naar (1,4) en vervolgens naar $\vec{v}$.

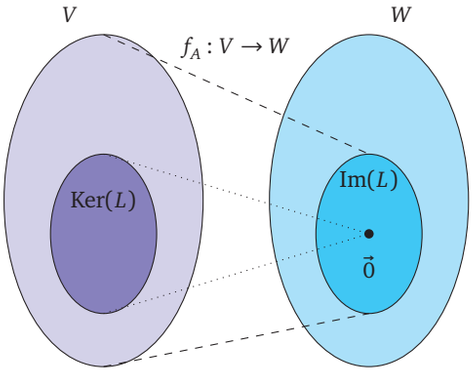


Figuur 5 *– Een visuele voorstelling van een lineaire transformatie van het vlak*

Het 'meetkundig rekenen' door meetkundige transformaties aaneen te schakelen wordt verder vertaald in algebraïsche rekenregels. Bijvoorbeeld het feit dat uitrekken met factor r en vervolgens uitrekken met factor s neerkomt op uitrekken met factor sr, wordt nu samengevat als $s(r\vec{v}) = (sr)\vec{v}$. Ook een lineaire transformatie van het vlak wordt nu een symbolische vermenigvuldiging van een matrix met een vector $A\vec{x} = \vec{b}$. Eerder dan een visuele voorstelling draait het nu om het zorgvuldig uitrekenen van het matrixproduct of het oplossen van de vergelijking. Algoritmes zoals rijreduceren passen ook perfect in deze wereld.

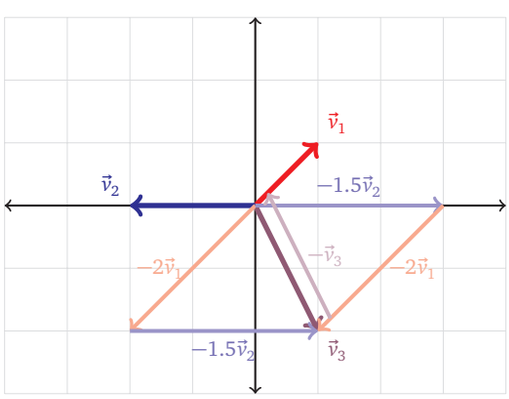
Een derde wereld is de formele wereld. Deze wereld heeft iets van een utopisch kantje, omdat hij moeilijk te bereiken is met leerlingen. In de formele wereld wordt er een wiskundig-abstract begrip gegeven aan vectoren, matrices enzovoort *zonder* noodzakelijkerwijs symbolen te gebruiken. In deze wereld worden vectoren begrepen als abstract wiskundige objecten die elementen zijn van een verzameling met 'lineaire' eigenschappen. Matrices zijn dan de natuurlijke functies tussen die verzamelingen. De symbolische matrixvermenigvuldiging $A\vec{x} = \vec{b}$ betekent nu dat de vector $\vec{x}$ onder de lineaire functie geassocieerd met A, genoteerd als f_A, afgebeeld wordt op $\vec{b}$. Het draait minder om het (symbolisch) uitrekenen van concrete waarden voor $\vec{b}$ noch $\vec{x}$, maar over het verband tussen de verschillende verzamelingen en functies. Worden lineair onafhankelijke vectoren afgebeeld op lineair onafhankelijke vectoren? Op verschillende

vectoren? Op de nulvector? En wat is het verband met de beeldverzameling van f_A? Dat zijn de relevante vragen in deze wereld. Een grenssituatie tussen de formele wereld en de andere twee is bijvoorbeeld het gebruik van een Venndiagram. Het abstracte, 'onvoorstelbare' object van een lineaire transformatie wordt dan symbolisch een pijl tussen twee ellipsen, en het redeneren over visuele regio's in de tekening is de meetkundige vertaling van onze eerdere formele vraag over welke vectoren op $\vec{0}$ afgebeeld worden.



De formele wereld blijft in principe afgescheiden van de symbolische wereld, al bestaat bijvoorbeeld bovenstaande grijze zone met de Venndiagrammen. Een leerling die met symbolen rekent en symbolische eigenschappen noteert, zoals in paragraaf 2 voorkomt, betekent echter niet dat die leerling zich in de formele wereld bevindt. Meer zelfs, eigenschappen of uitspraken in de formele wereld kun je vaak in Nederlands uitleggen, zonder veel symbolen.

We werken de verschillende werelden uit voor lineaire (on)afhankelijkheid als voorbeeld. Meetkundig gezien betekent lineaire afhankelijkheid dat je ten eerste een vector kunt maken uit de andere vectoren in de verzameling, en ten tweede dat er een ketting van vectoren bestaat die bij de nulvector uitkomt. We illustreren dit hieronder op een tekening van drie vectoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ en $\vec{v}_3$ in $\mathbb{R}^2$.



Deze drie vectoren zijn lineair afhankelijk, want je kan $\vec{v}_3$ maken als lineaire combinatie van $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ (linkse pijlketting), namelijk $\vec{v}_3 = -2\vec{v}_1 - 1.5\vec{v}_2$. Daarnaast is er ook een (gerelateerde) ketting van vectoren die bij de nulvector uitkomt (rechtse pijlketting): $-1.5\vec{v}_2 - 2\vec{v}_1 - \vec{v}_3 = \vec{0}$.

Symbolisch gezien betekent lineaire afhankelijkheid van een verzameling $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ dat de vergelijking $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_n\vec{v}_n = 0$ een niet-triviale oplossing heeft (waarbij minstens één c_i niet gelijk is aan 0). Een verzameling is dan lineair onafhankelijk, wanneer de vectoren niet afhankelijk zijn. Op zich betekent dit weinig meer dan een vreemde algebraïsche vergelijking met een al dan niet triviale oplossingenverzameling.

Vanuit het formele perspectief is een verzameling vectoren lineair afhankelijk wanneer er 'redundante' informatie in de verzameling zit. Je kunt een of meerdere vectoren weglaten om dezelfde voortgebrachte ruimte te behouden. Dat formele inzicht vormt dan ook een mogelijke inleiding om het concept 'basis' te introduceren; dat is precies een minimale verzameling vectoren (dus lineair onafhankelijk) die wel nog de hele ruimte V voortbrengt. Merk op dat hier geen symbolen aan te pas komen; dat is dan ook geen kenmerk van de formele wereld.

4.2 Didactische adviezen bij de drie werelden

Nu de drie verschillende werelden duidelijk zijn, kunnen we verdere didactische adviezen formuleren om die werelden te coördineren in de lessen. We raden het je vooreerst van harte aan om zelf eens een tabel te maken met op iedere rij een concept (lineaire onafhankelijkheid, basis, deelruimte, ...) en in iedere kolom de bijhorende voorstelling (in meetkundige, symbolische en formele wereld). Als de verbanden voor jezelf duidelijk zijn, kun je ook vlotter schakelen tussen de werelden in de les *en* je realiseren wanneer leerlingen vastzitten in één wereld. Het belangrijkste advies is om iedere overgang tussen de werelden expliciet te maken voor de leerlingen, en bij een nieuw concept interpretaties te voorzien van meerdere werelden. Spring dus niet zonder uitleg van een vectordiagram naar een vergelijking naar een formele definitie.



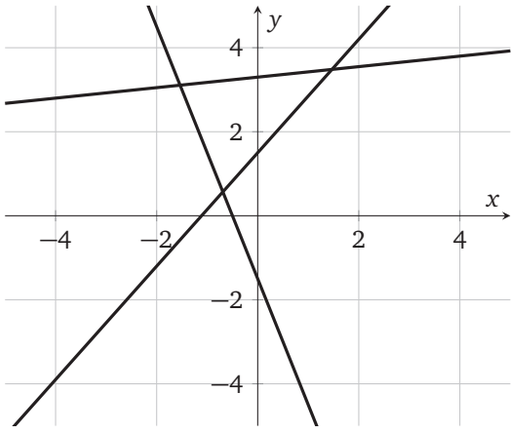
Je vraagt je mogelijks af in welke volgorde je best de drie werelden behandelt. Ga je best vanuit de meetkundige wereld naar de symbolische en dan naar de formele? Is een andere volgorde beter, of maakt het eigenlijk niet uit? Het grootste verschil tussen de verschillende aanpakken in deze loep slaat exact op die verschillende volgorde. Paragraaf 1 startte vanuit de formele wereld, want de focus lag op (deel)verzamelingen en hun operaties, met weliswaar veel concrete voorbeelden al van in het begin. De meetkundige en symbolische wereld komen er minder aan bod; meer zelfs, het argument is net dat leerlingen niet mogen blijven hangen in de meetkundige "pijlenvoorstelling". Paragraaf 2 startte vanuit de symbolisch(-formele) wereld, met tegelijkertijd een nadruk op formele eigenschappen verklaard in het Nederlands en met veel puur-symbolische bewijzen. Naar het einde toe worden dan nog concrete vectorruimten, zoals $\mathbb{R}^n$, verbonden aan de formeel-symbolische theorie. Paragraaf 3 stelde enkele instapactiviteiten voor die meestal vanuit de meetkundige wereld beginnen, en dan toewerken naar de formele wereld. Dit overkoepelend kader kan u helpen kiezen tussen de verschillende aanpakken, volgens wat het beste aansluit bij uw klascontext en het specifieke concept. In een Amerikaans experiment met 70 studenten waar systematisch de volgorde van de drie werelden gewisseld werd, besloot men alleszins

> *We merkten dat de attitude [van studenten] tegenover de leerstof veel positiever was, wanneer de concepten eerst werden aangeboden vanuit de meetkundige of symbolische wereld. Zodra leerlingen echter met alle drie de werelden voor een concept [vectorruimte, lineaire onafhankelijkheid, ...] kennisgemaakt hadden, leek er weinig verschil te zijn in het bereikte begripsniveau.*
>
> *— (Hannah e.a., 2014), vertaald*

We bespraken al de volgorde van de drie werelden, alsook de algemene tip om overgangen tussen de drie werelden expliciet te benadrukken. Je kunt ook specifieke taken gebruiken om het wisselen van werelden in te oefenen. Dat kan heel eenvoudig: op het einde van een oefening vraag je de leerlingen om hun oplossingsmethode te vertalen naar een andere wereld. Daar heb je quasi geen extra voorbereidingswerk aan. Als je matrices laat rijreduceren (symbolisch rekenwerk), vraag je bijvoorbeeld wat dat betekent voor de voortgebrachte ruimte van de rijen (formele wereld) en hoe je het resultaat ook al meetkundig had kunnen

zien aankomen. Een iets grotere transitietaak kan bijvoorbeeld een oefening zijn waarin meerdere werelden tegelijk aan bod komen. In de opgave in Figuur 6 wordt op het eerste gezicht een strikvraag gesteld, toch voor wie de drie werelden niet goed coördineert. Zou jij er ook intrappen?

Naast zulke strikvragen kun je ook meer impliciete transitietaken geven, waarbij de opgave geformuleerd is in één wereld (meetkundige, symbolische of formele) en waarbij je verwacht dat de oplossingsmethode in een andere wereld zal gebeuren. We tonen in Tabel 2 enkele opgaves ter inspiratie, een volledigere overzicht werd gemaakt door Stewart (2018).



***Figuur 6** – Hoeveel oplossingen heeft het lineaire stelsel dat hier weergegeven is? Overgenomen uit (Oktaç, 2018)*

Oplossen met	Opgave in meetkundige wereld	Opgave in symbolische wereld	Opgave in formele wereld
Meetkundige wereld	Is de vectorruimte $\mathbb{R}^2$ een deelruimte van $\mathbb{R}^3$? Verklaar je antwoord met een tekening.	Wat berekent de formule $\|u\|\,v + \|v\|\,u$ meetkundig gezien voor vectoren v en u in $\mathbb{R}^2$?	Het is gegeven dat de voortgebrachte ruimte van $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$ dezelfde is als die van $\{\vec{v}_1\}$. Wat betekent dit meetkundig? Wat als ook $\text{span}\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ hetzelfde is?
Symbolische wereld	Je krijgt twee vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ [in een bij te voegen diagram]. Bereken de coördinaten van een vector op de bissectrice.	Hoe groot kan de oplossingsverzameling van onderstaand stelsel zijn (afhankelijk van a)? $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + \left(a^2 - 8\right) y = a \end{cases}$	Toon symbolisch aan dat scalair vermenigvuldigen van een vector met factor -1 de inverse vector voor de optelling geeft. [Gebruik deze nog toe te voegen lijst van symbolische axioma's]
Formele wereld	Stel dat je twee gegeven vlakken hebt in $\mathbb{R}^3$. Hoe kan je dan in de taal van de vectorruimten hun doorsnede beschrijven?	Verklaar de grootte van de dimensie van $\text{Span}\{(a-1,a+3),(a+3,a-1)\}$ voor een gegeven a-waarde? Wat met de dimensie van $\text{Span}\{(a_1-1,a_1+3),(a_2+3,a_2-1)\}$ voor gegeven a_1- en a_2-waardes?	Verklaar in woorden waarom $\mathbb{R}^{2\times 2}$ isomorf is met $\mathbb{R}^4$.

***Tabel 2** – Verschillende opgaves die in één wereld starten en in een andere eindigen.*

Conclusie

In deze loep presenteerden we verschillende didactische insteken om vectorruimten te introduceren. Die verschillen reflecteren ook in de verschillende contexten waar ze geschikt kunnen zijn: een hele cursus voor de 6 uurs, een abstracte insteek voor de 8 uurs, of open problemen als huistaak voor beide. Met deze loep gaven we alvast een verbreding ten opzichte van de typisch axiomatische aanpak in de handboeken. We hopen dat je hieruit de nodige inspiratie kan putten om zelf creatief met het leerdoel over algebraïsche structuren bezig te zijn. Bovendien beschik je nu over een vakdidactisch perspectief op de gekende problemen bij vectorruimten vanuit de “drie werelden”, wat ook blikverbredend kan werken voor andere lesonderwerpen.

Bronnen

Andrews, W. S. (1917). *Magic Squares and Cubes*. Open Court Publishing Company.

De Naeghel, K., Gheysens, L., Tytgat, P., & Vanlommel, E. (2024). Algebraïsche structuur: de vectorruimte $R,R^n,+$ [Geraadpleegd op 2025-12-04]. https://wiskundeplan.be/lesmateriaal/

Dorier, J.-L. (2000). *On the Teaching of Linear Algebra* (Deel 23). Springer Science & Business Media.

Hannah, J., Stewart, S., & Thomas, M. (2014). Teaching Linear Algebra in the Embodied, Symbolic and Formal Worlds of Mathematical Thinking: Is There a Preferred Order?. *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Lay, D. C. (2016). *Linear Algebra and Its Applications* (5de ed.). Pearson.

Oktaç, A. (2018). Conceptions About System of Linear Equations and Solution. In S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman & M. Zandieh (Red.), *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra* (pp. 71–101). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66811-6_4

Sanderson, G. (2016). Essence of Linear Algebra [Geraadpleegd op 2025-12-04]. https://www.youtube.com/playlist?list=PLZHQObOWTQDPD3MizzM2xVFitgF8hE_ab

Stewart, S. (2018). Moving Between the Embodied, Symbolic and Formal Worlds of Mathematical Thinking with Specific Linear Algebra Tasks. In S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman & M. Zandieh (Red.), *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra* (pp. 51–67). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66811-6_3

Stewart, S., Andrews-Larson, C., & Zandieh, M. (2019). Linear algebra teaching and learning: Themes from recent research and evolving research priorities. *ZDM*, *51*(7), 1017–1030. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01104-1

Thomas, M. O. J., & Stewart, S. (2011). Eigenvalues and eigenvectors: Embodied, symbolic and formal thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *23*(3), 275–296. https://doi.org/10.1007/s13394-011-0016-1

Trigueros, M., & Wawro, M. (2020). Linear Algebra Teaching and Learning. In *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 474–478). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100021

van Luijk, R. (2024). Linear Algebra I [Geraadpleegd op 2025-12-11]. https://pub.math.leidenuniv.nl/~luijkrmvan/ps/LinearAlgebra1.pdf

Vanlommel, E., & Roelens, M. (2024). Groepen in de derde graad [Geraadpleegd op 2025-12-04]. *Uitwiskeling*, *38*(4), 14–54. https://www.uitwiskeling.be/artikel/groepen-in-de-derde-graad

Wawro, M., Zandieh, M., Rasmussen, C., & Andrews-Larson, C. (2013). Inquiry Oriented Linear Algebra: Course Materials. https://iola.math.vt.edu

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.