De functie van Uitwiskeling
op basis van de antwoorden in de enquête

> *"Jullie leveren al jaren lang fantastisch werk. Chapeau dat jullie dit al zo lang doen."*

Zo lezen we in de antwoorden van onze enquête, een vragenlijst die we in UW41/02 uitstuurden. Na 40 jaar Uitwiskeling was het tijd om ons doelpubliek opnieuw te leren kennen: Aan welke leerlingen geven jullie les? Welke onderwerpen interesseren jullie? En wat zoeken jullie in Uitwiskeling? In dit redactioneel presenteren we een kort overzicht van jullie antwoorden op de enquête (waarvoor dank!). We koppelen daaraan onmiddellijk ook wat we zeker verder zetten maar ook wat we vernieuwd hebben of zullen vernieuwen.

Allereerst merkten we een mooie spreiding op bij de respondenten:

- van 0 tot 40 jaar leservaring
- ongeveer evenveel mannen als vrouwen
- geven les in studierichtingen met 0 uur wiskunde tot 8u per week (met het merendeel 4-8u)

Die spreiding maakt het uitwisselen van ideeën net zo boeiend, maar ook moeilijk om artikelen te schrijven die in een grote diversiteit aan klassen relevant kunnen zijn. We blijken er volgens de antwoorden van deze enquête grotendeels in te slagen, mede dankzij de diversiteit aan lescontexten die ook in de redactie aanwezig is.

Uitwiskeling blijkt een heel functioneel magazine; meer dan 80 procent van jullie leest ons magazine om algemene inspiratie op te doen of concrete ideeën en lesmateriaal te vinden voor een aankomende les. Sommigen nemen het magazine ook ter hand als ontspanning, maar het lijkt toch voornamelijk om werkondersteunend lezen te gaan. Misschien kun je het tijdschrift zelfs een laagdrempelig professionaliseringsmiddel noemen...

En welke artikelen willen jullie dan precies lezen? Qua onderwerp raken we alleszins de bal, zeker als het over nieuwe onderwijsdoelen gaat. Veel leerkrachten gaven aan concrete artikels in hun lespraktijk geïntegreerd te hebben, zoals het citaat hieronder aangeeft.

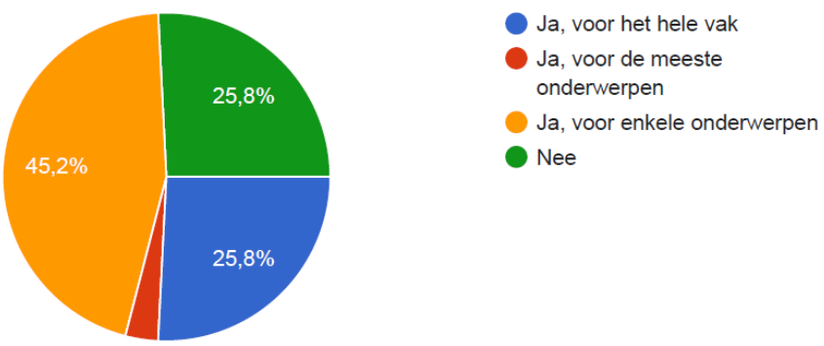
> *"Een hele tijd geleden vond ik het artikel over de volgorde van de bewerkingen ook heel nuttig. Daar werd mooi uitgelegd waarom de vermenigvulding in principe voorrang heeft op de optelling. Ik leg het nu ook zo uit aan de leerlingen."*

We onthouden uit de antwoorden ook dat we niet mogen verdwalen in al te 'exotische' onderwerpen, ver weg van de dagdagelijkse klaspraktijk of enkel toepasbaar als onderzoeksproject in een sterk wiskundige derde graad. We houden hier zelf alleszins rekening mee in onze planning van de verschillende nummers. We lanceren bovendien een warme oproep naar kandidaatauteurs om de 'klassiekere' onderwerpen voor lagere graden te herbekijken en hierover een artikel in te zenden. Zeker leerkrachten uit de lagere graden of richtingen met minder uur wiskunde nodigen we uit, en voorzien we van stapsgewijze, technische ondersteuning om hun didactische ideeën verspreid te krijgen in een Uitwiskelingartikel.

We maakten daarom een online pagina op **uitwiskeling.be/artikel-indienen** die oplijst hoe je jouw artikel(idee) kunt indienen. Je kunt dus meehelpen om voor iedere graad en context inspi-

rerende artikels te maken. In de enquête gaven jullie aan te twijfelen over het schrijven van een artikel vanwege tijdsgebrek en zelftwijfel (“Heb ik wel iets ‘boeiends’ te vertellen?”). Om jullie over de drempel te helpen, ondersteunen we je zowel op technisch als op inhoudelijk vlak. We stellen ons artikelsjabloon open en zetten je bijdrage zelf technologisch op punt. Verder verwelkomen we ook teksten die nog niet volledig afgewerkt zijn met meerdere constructieve feedbackrondes. Je kunt ons altijd contacteren, bijvoorbeeld over een nog-niet-uitgewerkt idee dat je hebt voor een artikel. Onthoud: Uitwiskeling is van leerkrachten, voor leerkrachten! We vormen één groot Vlaams netwerk van wiskundeleerkrachten en zijn er om elkaar te inspireren en te ondersteunen. En wie weet, misschien kun je naar aanleiding van een Uitwiskelingartikel een betaalde nascholing geven voor andere leerkrachten... Stuur ons dus zeker een mailtje met jouw artikel(idee) op inzendingen@uitwiskeling.be!

Na onze warme oproep om mee te schrijven aan Uitwiskeling, zodat we voor iedere graad en context boeiend materiaal kunnen aanbieden, keren we nu terug naar welke artikels jullie graag lezen en hoe wij die vraag kunnen vervullen. Los van het onderwerp vinden jullie de artikels alleszins van goeie lengte, met soms voorkeur om dieper te gaan met een lang “Loep”-artikel. Er was nog een aspect waar unanimiteit over heerste: bijgevoegd lesmateriaal is een grote plus! Het zorgt dat de lezende leerkracht onmiddellijk aan de slag kan met een activiteit. Deze voorkeur wordt nog duidelijker bij volgende Figuur 1.



Figuur 1 *– De percentages van hoeveel leerkrachten een (deel van een) eigen cursus ontwikkelen*

Ongeveer 75% van de respondenten gebruikt een vorm van zelfgemaakte cursus! Dat hoeft geen volledig handboek te zijn, maar kan bijvoorbeeld ook een collectie van werkteksten zijn voor een specifiek hoofdstuk. Meestal gaat het over een leerkracht die er zelf aan werkt, of met enkele collega’s af en toe iets bijbouwt. En als je dat getal hoort, is het vanzelfsprekend dat er vraag is naar bijgevoegd lesmateriaal: zo kan het onmiddellijk in de eigen cursus opgenomen worden.

Zo’n zelfgemaakte cursus is zeker niet uniek binnen het Uitwiskelinglezerspubliek, maar een trend die we ook in de bredere onderwijswereld zien. In februari 2024 citeerde De Morgen: *“Als we samenwerken, kunnen we veel beter én goedkoper materiaal maken dan op de markt is”*, en ook al in april 2023 verscheen in Knack een artikel met een citaat van een leerkracht: *“Het is toch altijd fijner om zelf een cursus te kunnen maken.”*(Gordts, 2024; Peuteman, 2023) Ook in Nederland zien we dezelfde beweging: meer dan de helft van de leerkrachten maakt lesmateriaal grotendeels zelf, mede dankzij de beschikbaarheid van artificiële intelligentie en soms als tegenreactie op de kwaliteit van beschikbare handboeken van de uitgeverijen (Fasel, 2024; Peppels & Pauwels, 2024).

Het doet de vraag rijzen hoe Uitwiskeling zich wil profileren in het landschap van ‘lesmateriaalproductie’. Willen we ons richten naar korte inspiraties, waar de lezer zelf nog materiaal voor moet maken? Of eerder naar volledig afgewerkte lesactiviteiten, in plaats van de achterliggende didactische insteek? Of toch eerder beide? Als vrijwilligersorganisatie hebben we niet de mankracht noch het budget van een commerciële uitgever om volledige kant-en-klare methodes te ontwikkelen. Om een didactische insteek te verduidelijken is een concrete voorbeeldoefening wellicht voldoende duidelijk. Met onze artikels hopen we jullie te inspireren en zelfstandig te laten naden-

ken over wiskundedidactiek; volledig afgewerkt lesmateriaal lijkt voor dat doel eerder nefast dan ondersteunend. We houden het daarom ergens tussenin: geen volledige cursus, maar boeiende artikels met voorbeeldlesmateriaal!

In de enquête kwam nog een ander aspect naar boven over het bijgevoegde lesmateriaal: de aanpasbaarheid en herbruikbaarheid. Onze mooi geformateerde artikels bevatten vaak voorbeeldlesactiviteiten, maar om die daadwerkelijk te gebruiken, moet je eerst tijd maken om de oefening over te typen. Het idee om *aanpasbaar* lesmateriaal toe te voegen kreeg dan ook de hoogste score van alle voorgestelde ideeën in de enquête met 3,6 op 4 (en de laagste standaardafwijking)! We nemen ons daarom voor, en vragen het expliciet aan auteurs, om indien mogelijk voorbeeldbestanden in Word of LaTeX toe te voegen aan het artikel. Zo vind je in dit nummer bij de loep over vectorruimten verschillende bronnen met onmiddellijk bruikbaar lesmateriaal: zowel volledige cursussen als individuele oefeningen in 'Ximera', die je onmiddellijk in je online browser kunt aanpassen! Laat ons weten wat je ervan vindt en geef een seintje als je zelfgemaakt materiaal wilt delen!

We sluiten dit redactioneel af met een positief gevoel en willen jullie nogmaals bedanken voor jullie antwoorden op de enquête. Het gaf ons nuttige inzichten en leverde ook enkele aandachtspunten op waar we rekening mee zullen houden. We kijken er alleszins naar uit om van je te horen en je te ondersteunen bij het schrijven. Dus: als jij of je collega ooit één van die momenten heeft – een geslaagde les, een originele invalshoek, een verrassend inzicht – neem dan een kijkje op **uitwiskeling.be/artikel-indienen** of neem contact op via inzendingen@uitwiskeling.be.

● *Alexander Holvoet, namens de redactie*

Bronnen

Fasel, Z. (2024). Meer dan de helft van docenten maakt lesmateriaal grotendeels zelf: 'Er bestaat zoiets als ChatGPT'. *AD.nl*.

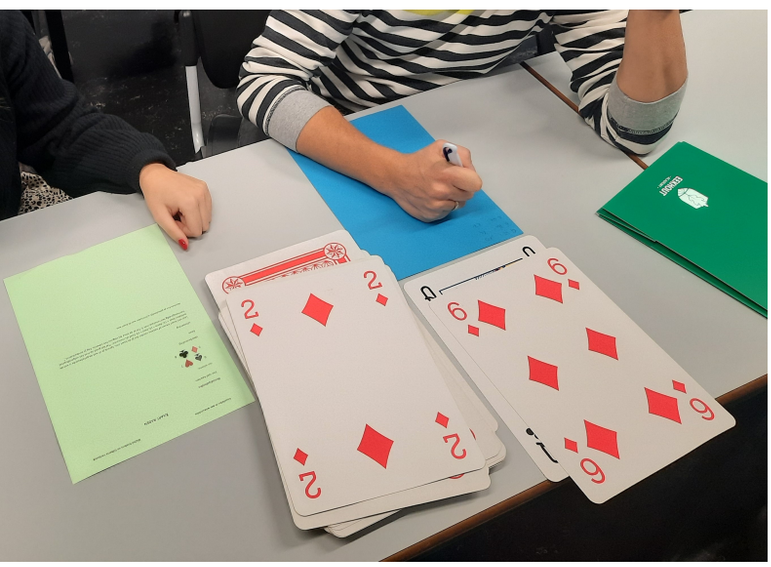
Gordts, P. (2024). Gemeenschapsonderwijs start zelf met handboeken: 'Door samen te werken kunnen wij beter én goedkoper materiaal maken'. *De Morgen*.

Peppels, J., & Pauwels, P. (2024). Waarom docenten steeds vaker voor de klas staan met zelfgemaakt lesmateriaal. *EenVandaag*.

Peuteman, A. (2023). De Leraarskamer van Knack: 'De meeste schoolboeken zijn voor het katholiek onderwijs gemaakt'. *Knack*.

Met grote droefheid delen we mee dat Hilde Eggermont op 10 december 2025 overleden is. Hilde was één van de oprichters van Uitwiskeling. Ze heeft aan alle nummers van Uitwiskeling meegewerkt, tot op het einde. We voorzien in een volgend nummer een terugblik.





Goochelen en wiskunde: rekenen met letters

Gilberte Verbeeck

Herman Dufraign en ik, beiden acteurs bij een amateurgezelschap, vormen een duo: hij de goochelaar en ik de leraar, hij gepassioneerd door wiskundige principes achter goocheltrucs en ik geïnteresseerd in toepassingen bruikbaar in de wiskundeles. Herman en ik geven af en toe workshops voor leraren. In dit spinnenweb stel ik twee trucs voor die je op een vergelijkbare manier kunt aanbieden aan leerlingen van de eerste graad. De eerste is een eenvoudige kaarttruc die we in onze workshops door de leraren zelf laten onderzoeken en inoefenen. De tweede is een truc die Herman uitvoert en die de leraren onderzoeken.

Heb je honger naar meer? Via de zoekterm ‘goochelen’ kan je in het online archief van Uitwiskeling heel wat artikels vinden over ‘Goochelen en wiskunde’.

1 Een speelkaart raden

Voorbereiding

Neem een spel kaarten. Toon het volgende schema:



Figuur 1 *– Kleurcode*

Herman gaf me een handig ezelsbruggetje dat me de oorspronkelijke kleurcode deed aanpassen. Schoppen heeft één puntje bovenaan, harten heeft daar twee rondingen, klaveren heeft er drie en ruiten heeft rondom vier puntjes. Tel bij 1, 2, 3 en 4 telkens 5 op en je hebt de kleurcode.

Uitvoering

Laat een leerling een kaart trekken uit het volledige kaartspel. De leerling toont de kaart aan de klas zonder dat jij deze kunt zien.

Spreek af wat de getalwaarde is van de beelden: boer = 11; dame = 12; heer = 13. Vervolgens zet je de leerling aan het rekenen. De hele klas mag meerekenen. Je geeft de volgende de instructie: “Tel het getal van de kaart op met het volgende getal. Als je bijvoorbeeld een 6 trok, tel je hierbij 7 op. Vermenigvuldig het resultaat met 5. Tel bij het getal dat je zo verkreeg het getal dat je in het

schema vindt bij de kleur van jouw kaart. Zeg tenslotte de einduitkomst."

Jij verrast je leerlingen met onmiddellijk de kaart te benoemen die de leerling trok en aan de klas toonde.

Een variante is dat je meerdere leerlingen een kaart laat trekken. Je kunt immers van elke leerling de kaart bepalen.

Uitleg voor de goochelaar

Veronderstel dat de leerling een klaveren 8 trekt. Tel bij 8 het volgende getal 9 op, dit geeft 17. De uitkomst na vermenigvuldigen met 5 is 85. Tel hier 8 bij op omdat dit de kleurcode is bij klaveren en dat geeft 93. De leerling(en) doet(n) dus de volgende berekening: $(8+9)\cdot 5+8=93$.

Hoe vind jij dat de leerling klaveren 8 trok? De cijfers 9 en 3 vormen het getal 93. Het eerste cijfer 9 geeft je door er 1 van af te trekken de 8 van de kaart van de leerling. Het tweede cijfer geeft je de kleur, klaveren hoort immers bij 3 met zijn 3 rondingen. De leerling trok een klaveren 8.

Veronderstel dat de leerling een ruiten 4 trekt. Door de instructie te volgen vinden de leerlingen $(4+5)\cdot 5+9=54$. De cijfers 5 en 4 vormen het getal 54. Het eerste cijfer 5 geeft je door er 1 af te trekken de 4 van de kaart van de leerling. Het tweede cijfer geeft je de 4 puntjes van het symbool van de ruiten. De leerling trok een ruiten 4.

Veronderstel dat de leerling schoppen 10 trekt. Hij krijgt na de berekeningen het getal: $(10+11)\cdot 5+6=111$. Je krijgt hier een getal met drie cijfers maar ook hier werkt de truc. Je splitst dit getal nu in 11 tientallen en 1 eenheid. $11-1=10$ en 1 staat voor schoppen. De leerling trok schoppen 10.

Wiskunde achter de uitleg

Wat is de rol van de wiskundige bij het ontwerp van deze truc? Waarom geven de cijfers of getallen van de uitkomst de goochelaar genoeg informatie? Waarom moet de goochelaar 1 aftrekken en waarom is de kleurcode ontworpen met 6, 7, 8 en 9 en niet met het ezelsbruggetje van Herman?

We gebruiken letters en noemen de getalwaarde van de kaart n. We gebruiken k voor het getal dat eigen is aan de kleur en bouwen de kleurcode op met $5+k$. We zetten de berekeningen om in de volgende algebraïsche bewerking: $(n+(n+1))\cdot 5+(5+k)=(2n+1)\cdot 5+5+k=10n+5+5+k=10n+10+k=10(n+1)+k$. Deze bewerking verklaart meteen waar n vandaan komt en waarom er bij de kleurcode telkens 5 is opgeteld bij het aantal punten of rondingen van de kaartkleuren.

Bruikbaarheid in de les

Deze truc past heel goed in lessen waar rekenen met letters aan bod komt en/of probleemoplossend werken.

2 Denkbeeldige dobbelstenen

Voorbereiding

Je hebt twee kleine papiertjes en een pen nodig.

Uitvoering

Geef een leerling twee papiertjes en de volgende instructie: "Dobbel met twee denkbeeldige dobbelstenen. Onthoud goed waar elke dobbelsteen ligt op je bank. Schrijf op het ene papiertje het aantal ogen van de dobbelsteen die het dichtst bij je ligt en geef het aan één van je buren. Schrijf op het andere papiertje het aantal ogen van de dobbelsteen die het verst van je ligt en geef dat aan een andere buur. Vermenigvuldig de ogen van de dobbelsteen die het dichtst bij je ligt met 2 en tel er 5 bij op. Vermenigvuldig dit getal met 5. Tel bij dit resultaat de ogen van de dobbelsteen die het verst van je verwijderd ligt. Zeg luidop het getal dat je vond."

Je verrast je leerling door de ogen van de worp op beide dobbelstenen zonder aarzelen te geven.

Variant: laat verschillende leerlingen met echte dobbelstenen werpen, geef dezelfde instructie. Jij kunt alle ogen van elke worp benoemen.

Uitleg voor de goochelaar

Aan de hand van een willekeurig voorbeeld, merk je snel hoe de truc werkt. Stel dat de ogen van de worp 5 (ogen van dobbelsteen dichtbij) en 3 (ogen van dobbelsteen die verder ligt) zijn. $5\cdot 2=10, 10+5=15, 15\cdot 5=75, 75+3=78$. Trek 25 af van 78 en je vindt 53, een getal gevormd door de ogen van de dobbelsteen het dichtst bij de leerling en de ogen van de worp van de dobbelsteen het verst van hem.

Wiskunde achter de uitleg

Wat is de rol van de wiskundige bij het ontwerp van deze truc? Hoe komt het dat we 25 van de uitkomst moeten aftrekken en dat dan de cijfers van het getal net de ogen van de worp geven?

We gebruiken letters en vervangen de getallen door x en y. De berekening uitgeschreven met de onbekenden is $(x \cdot 2 + 5) \cdot 5 + y = 10 \cdot x + 25 + y = 10 \cdot x + y + 25$. We zien 25 verschijnen. Als we dat aftrekken krijgen we een getal met 2 cijfers waarvan de tientallen x geven en de eenheden y.

Bruikbaarheid in de les

Deze truc past perfect in een les rond modelleren en rekenen met letters. Je kunt de leerlingen varianten laten bedenken. Enkele voorbeelden: $(x \cdot 4 + 6) \cdot 5 + y = 20 \cdot x + y + 30$ of $(x \cdot 5 + 5) \cdot 2 + y = 10 \cdot x + y + 10$ of $(x \cdot 6 + 2) \cdot 5 + y = 30 \cdot x + y + 10$.

Je kunt de uitvoering die hierboven beschreven werd nog mysterieuzer maken door elke leerling een andere berekening te laten uitvoeren. Het is wel belangrijk om in dat geval goed te onthouden welke formules je voor welke leerling nodig hebt.

GeoMath
Navigeren met wiskunde

Frederic Hancke

Een interessante en voor de leerlingen toch leuke en toffe activiteit voor wiskunde organiseren, is niet eenvoudig. Aan het Sint-Michielscollege Brasschaat ondernamen we in 2024 een bescheiden poging met de eerste editie van een dagactiviteit die GeoMath werd gedoopt (verplicht voor alle leerlingen van het vijfde jaar met sterke wiskunde (6u of 8u)). In dit artikel wordt uitgelegd wat de activiteit precies inhoudt en hoe ze eventueel in de eigen school georganiseerd kan worden.

Het concept

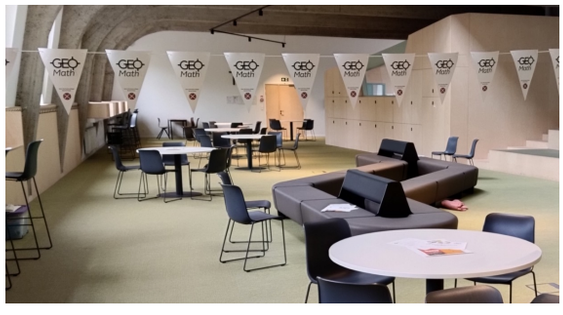
De leerlingen moeten zich enkele weken op voorhand in ploegjes van vier indelen. Ze mogen de groepssamenstelling zelf kiezen en dat mag ook over de klassen heen. Ze moeten een originele ploegnaam verzinnen en een leuke mascotte kiezen die de hele dag met hen mee gaat. Enkele toffe ploegnamen uit het verleden waren *De algebros*, *Pi-Power Girls* en *De π-raten*. De meesten brengen als mascotte een klein knuffelbeest mee, maar één ploegje had in 2024 een gigantische knuffelbeer bij (die ze dus de hele dag overal moesten meenemen). De dag van de activiteit zelf bestaat uit twee delen.

Deel 1 van de GeoMath: zelfstudie

's Morgens werken de leerlingen met hun ploegje in het Open Leercentrum van onze school gedurende anderhalf uur aan een zelfstudiepakket rond cryptografie. Het document daarvoor bestaat uit 17 pagina's en behandelt in een eerste deel enkele eenvoudige coderingstechnieken zoals de Caesarverschuiving, Vigenère, Beaufort en Rozier.

In een tweede deel wordt na een snelcursus modulorekenen ook nog RSA besproken. De leerlingen kunnen binnen hun ploegje het werk perfect opdelen en de leerkrachten wiskunde zijn ter beschikking om eventuele vragen te beantwoorden.

In het document zelf zijn er hier en daar kleine opdrachtjes voorzien om het geleerde in te oefenen. Maar er worden ook websites aangereikt waar de versleutelde teksten automatisch kunnen worden gekraakt zoals *dcode.fr* en *omnicalculator.com*.



Tijdens dit onderdeel maken de leerlingen ook een lestaak op punten waarbij ze verschillende gecodeerde boodschappen moeten kraken. Rond 10u vertrekt de hele groep dan voor het tweede deel van de dag naar het park van Brasschaat, een bosrijke omgeving op minder dan 4 km van de school en dus gemakkelijk met de fiets bereikbaar.

Deel 2 van de GeoMath: geocache

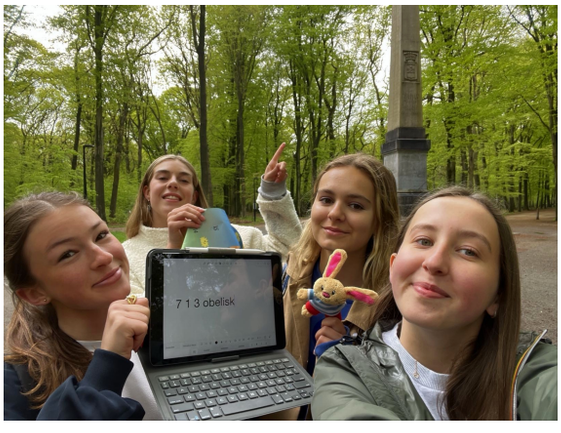
Tijdens dit deel van de dag (dat ongeveer 5u duurt) moeten de leerlingen met hun ploegje een parcours afleggen waarbij ze maximaal 16 controlepunten moeten doorlopen en maximum 4π km afleggen. Om de locatie van een controlepunt te vinden krijgen ze een opdracht die uit twee delen bestaat:

Deel 1 van de opdracht Aan de hand van korte en vrij eenvoudige wiskundige opdrachtjes (met leerstof van het vijfde jaar) worden de GPS-coördinaten van het controlepunt gevonden. Zowel de breedte- als de lengtegraad krijgen ze van ons gratis tot twee cijfers na de komma. De opdrachtjes geven hen dus het derde, vierde en vijfde cijfer na de komma. Zo'n opdrachtje gaat bijvoorbeeld als volgt:

De functie $f(x) = 3^{x+5} + 4c$ *heeft als asymptoot* $y = 100$. *Bepaal de waarde van* c.

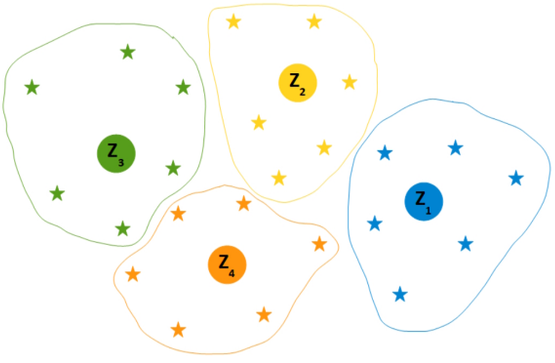
In dit geval is $c = 25$ en hebben ze het derde en vierde cijfer van de breedtegraad al gevonden. Zo krijgen ze voor elk controlepunt dat ze moeten vinden vier wiskundige opdrachtjes die hen telkens één of twee extra cijfers geven. Voor de 16 controlepunten moeten ze dus $4 \cdot 16 = 64$ wiskundige opdrachtjes oplossen. Om die reden hebben we het niveau niet té hoog gelegd.

Deel 2 van de opdracht De controlepunten werden zo gekozen dat er telkens een duidelijk herkenningspunt is. Dat kan bijvoorbeeld een standbeeld zijn, een fit-o-meter, een bruggetje, enzovoort. De beschrijving van dit herkenningspunt werd door ons samen met een unieke code van drie cijfers versleuteld met één van de coderingstechnieken uit het zelfstudiepakket van die ochtend. Deze beschrijving plus code moeten ze kraken en noteren.



Daarna lopen ze met hun ploegje naar het juiste controlepunt (via *Google Maps* op de smartphone) waar ze een leuk geposeerde selfie moeten nemen van de hele ploeg met het herkenningspunt duidelijk in beeld, alsook de gevonden 3-cijferige code én hun mascotte.

Het park van Brasschaat werd ingedeeld in vier zones (zie Figuur 1). Centraal in elke zone is er een bank waar een collega zit die de ploegjes leerlingen opwacht en hen een nieuwe opdracht geeft (dit heet een controlepost). Elke zone bevat zo'n 12 controlepunten in de onmiddellijke omgeving van de controlepost (in de figuur aangeduid met sterretjes, hier voor de eenvoud herleid tot 6 sterretjes). Bij hun opdracht krijgen de leerlingen dus ook de locatie van de controlepost waar ze nadien naartoe moeten om hun volgende opdracht te krijgen. De leerlingen maken hun nieuwe opdracht in de buurt van de bank waar de toezichthoudende leerkracht zit om te vermijden dat ze eventueel samenwerken.



Figuur 1 *– Indeling van de controlepunten in zones.* Z_1, Z_2, Z_3 *en* Z_4 *geven de locatie van de controlepost in elke zone aan.*

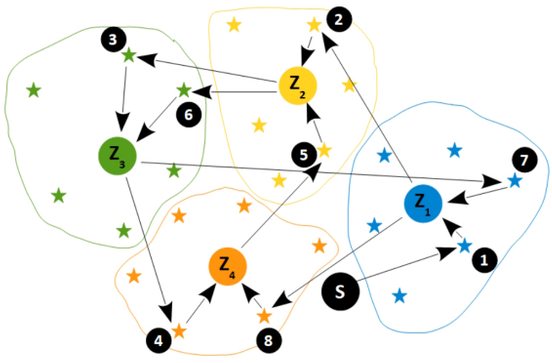
Een ludiek extraatje: in het park van Brasschaat is er een vijver met een klein eilandje. Eén van de opdrachten brengt hen naar een bootje op de oever. Met dit bootje moeten ze als ploeg rond het eiland roeien en onderweg enkele selfies nemen.

Elk ploegje moet zo ver mogelijk proberen te geraken vóór 16u want de hele activiteit staat op 16 punten en telt rechtstreeks mee voor het rapport. Er worden punten verdeeld als volgt:

- Lestaak in het Open Leercentrum: 3 punten
- Acht voltooide opdrachten: 5 punten
- Per extra voltooide opdracht: +1 punt
- Strafpunten kunnen ook verzameld worden, zoals voor het niet op tijd inschrijven (waarbij via een formulier de ploegleden, ploegnaam en mascotte moeten worden opgegeven) en het niet tijdig invullen van de bevragingen vooraf en achteraf.
- Ploegjes die vals (proberen te) spelen krijgen uiteraard 0.

De praktische organisatie

Om de kans op vals spelen zo klein mogelijk te maken, werden er bijna 50 controlepunten in het bos gekozen, ongeveer gelijk verdeeld over de vier zones. Omdat elk ploegje leerlingen maximaal 16 controlepunten bezoekt, kan er dus heel wat gevarieerd worden in hun routes. Gewoonlijk hebben we 20 ploegjes en dus komt elk controlepunt gemiddeld slechts 6,4 keer voor.



***Figuur 2** – Voorbeeld van de helft van een route (dus met twee cycli). Het startpunt wordt aangeduid met de letter S, de zwarte pijlen geven de volgorde aan van de opeenvolgende opdrachten (genummerd met de cijfers in de zwarte schijfjes).*

Zoals gezegd bezoekt elk ploegje maximaal 16 controlepunten en dus bezoeken ze elke controlepost/zone maximum vier keer. De volgorde waarin ze de verschillende zones bezoeken (dit heet een cyclus) zorgt voor een extra randomisatiefactor en kan als volgt gebeuren:

- Tegenwijzerzin: 1-2-3-4
- Wijzerzin: 4-3-2-1
- Tegenwijzerzin variant: 1-3-2-4
- Wijzerzin variant: 4-2-3-1

Zo kunnen er $4! = 24$ verschillende cycli gemaakt worden, maar er moet ook rekening mee gehouden worden dat de totale afstand binnen de perken blijft. Het is dus niet de bedoeling dat de leerlingen voortdurend van het ene uiterste van het park naar het andere uiterste moeten lopen. Vandaar dat we het bij deze vier cycli houden. Elk ploegje doorloopt de vier cycli één keer maar niet alle ploegjes doen dat in dezelfde volgorde.

Zie Figuur 2 voor een voorbeeldroute met twee cycli: eerst tegenwijzerzin en daarna de wijzerzin variant. Dit zorgt ervoor dat de leerlingen wat gedesoriënteerd raken en dus wordt het vals spelen automatisch al ontmoedigd. Bovendien is de 3-cijferige code die ze bij elke opdracht moeten decoderen uniek. Dus elk ploegje heeft bij elk controlepunt een compleet andere code te kraken. Ook de te gebruiken coderingstechniek wordt volledig gerandomiseerd over al hun opdrachten.

Om de strijd tegen fraude naar topniveau te brengen hebben we ervoor gezorgd dat de wiskundige opdrachtjes om de GPS-coördinaten te vinden voor iedereen altijd anders zijn. Zo hangt het onderwerp van de opdrachtjes af van de zone waar het controlepunt ligt. In zone 1 is het onderwerp bijvoorbeeld steeds logaritmische functies, in zone 2 steeds goniometrische functies, enzovoort.

Als kers op de anti-fraude-taart hebben we voor dezelfde zone per cyclus andere opdrachtjes gemaakt. Afhankelijk van de cyclus waarin de leerlingen zich bevinden in hun parcours krijgen ze ook nog eens totaal andere opdrachtjes over hetzelfde onderwerp voorgeschoteld. Een ploegje dat als *eerste* opdracht controlepunt 11 moet zoeken, zal dus andere wiskundige opdrachtjes krijgen dan een ploegje dat controlepunt 11 als *negende* opdracht moet zoeken, hoewel de resulterende GPS-coördinaten dezelfde zijn.



Al deze randomisatie in de opdrachten wordt in Python geprogrammeerd. Het resultaat wordt naar een bestand geschreven dat rechtstreeks in LaTeX wordt geïmporteerd. Het eerder vermelde voorbeeldopdrachtje ziet er in Python dan ook zo uit:

```
"De functie $f(x)=3^{x+5}+4c$ heeft als
asymptoot $y=" + str(4*gps[0]) +
"$. Bepaal de waarde van $c$."
```

waarbij `gps[0]` het stukje GPS-coördinaat bevat dat ze met deze vraag moeten vinden. Op dezelfde manier worden alle andere wiskundige opdrachtjes geprogrammeerd, afhankelijk van de GPS-coördinaat die gevonden moet worden.

Ook de lestaak in het Open Leercentrum is voor iedereen compleet verschillend. Via ChatGPT werden 90 zinnen gegenereerd waarin het woord wiskunde voorkomt. Deze zinnen werden in Python ingelezen en willekeurig aan elke ploeg toegewezen en in willekeurige volgorde versleuteld.

De winnende ploeg

Na afloop bekijken we onder wiskunde-collega's van het vijfde jaar welke ploeg de *meest verdienstelijke* is. Daarbij kijken we naar enthousiasme, originaliteit van de ploegnaam, mascotte en selfies, punctualiteit bij het inschrijven en invullen

van de bevragingen, en hoe ver ze zijn geraakt. De leerlingen van de winnende ploeg krijgen een medaille en een cadeaupakketje. Deze prijsuitreiking vindt enkele weken later plaats met een filmpje waarbij er foto's van die dag worden getoond.

Reacties

Na afloop vragen we aan de leerlingen wat ze van de GeoMath vonden en of ze suggesties hebben. Hier zijn enkele van hun reacties:

- *Het hele concept was super leuk. De voormiddag in OLC vond ik ook heel leuk. En de foto's maken was echt super!*
- *De combinatie van buiten sportief bezig zijn en met wiskunde bezig zijn in de natuur was erg fijn.*
- *De opdrachten waren zeer creatief en leuk om te maken.*
- *Ik vond het een leuke en creatieve manier om bezig te zijn met wiskunde, zonder dat het saai wordt.*
- *Ik heb de leerstof beter onder de knie gekregen op een leuke manier en ons groepje maakte de dag compleet! Ook de opdracht met het bootje vond ik een leuke ingeving.*

Zelf aan de slag?

Als je denkt dat dit allemaal wel erg veel werk moet zijn... dan heb je gelijk. Het goede nieuws is echter dat het concept voor een eerste editie in sterk vereenvoudigde vorm kan gemaakt worden, met bijvoorbeeld slechts enkele controlepunten per zone en minder randomisatie in de wiskundige opdrachtjes. Het minder goede nieuws is dat leerlingen erg creatief zijn en dus naar manieren zoeken om het spel alsnog te kraken (wat op zich eigenlijk ook een onderzoekscompetentie is).

Ik hoor het je denken... maar nee, helaas, we kunnen op dit moment geen kant-en-klaar softwarepakket aanbieden. Er is nog teveel informatie die manueel moet ingevoerd en gecontroleerd worden. Maar mocht je een poging tot navolging willen wagen, wat we ten zeerste aanmoedigen, dan willen we je daar nu alvast voor prijzen! De leerlingen zullen je $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ dankbaar zijn!

Uit het leerplan wiskunde voor de derde graad (D/2024/13.758/232) wordt zo het leerplandoel 55 over onderzoekscompetenties gerealiseerd. Maar ook van het *Gemeenschappelijk funderend leerplan* (D/2024/13.758/019) worden volgende leerplandoelen bereikt: 6, 10, 14, 21, 23, 24, 25 en 26. Van onze pedagogisch begeleider kregen we nog enkele extra tips, maar vooral lovende woorden.

Gouden tip: begin er lang op voorhand aan en controleer alles driedubbel zodat er geen fouten in zitten want dat kan de vreugde en het enthousiasme naar het vriespunt brengen. Volg eventueel dit stappenplan:

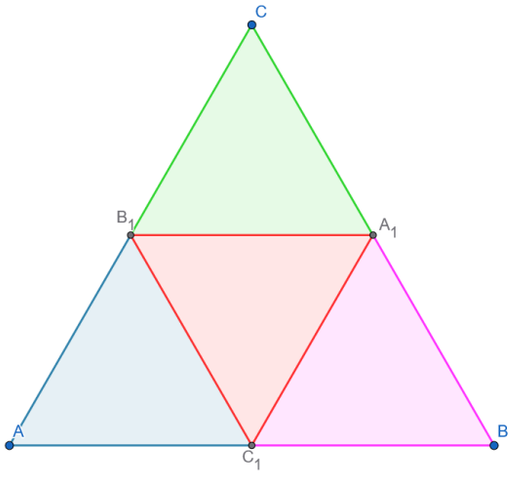
1. Zoek naar een geschikte locatie in de buurt van de school, liefst een park of bos met veel paadjes.
2. Kies voldoende duidelijk herkenbare controlepunten en verdeel ze in zones.
3. Maak wiskundige opdrachtjes om de GPS-coördinaten van elk controlepunt te kunnen vinden. Dit kan automatisch gerandomiseerd worden met een Pythonprogramma of eventueel ook met Excel.
4. Maak een zelfstudiepakket rond cryptografie.
5. Encrypteer de herkenningspunten en unieke codes voor elke opdracht.
6. Breng de wiskundige opdrachtjes en de encryptie samen in één opdracht voor elk controlepunt.
7. Organiseer een infosessie voor de leerlingen zodat ze goed weten wat er van hen verwacht zal worden.
8. Laat hen in ploegjes van vier inschrijven.
9. Bepaal voor elk ploegje leerlingen een route doorheen de controlepunten zodat die ongeveer even lang is voor alle ploegjes.
10. Orden de opdrachten per controlepost zodat de toezichthoudende leerkrachten de juiste opdracht kunnen geven aan elk ploegje.

Heb je nog vragen of leuke nieuwe ideeën, dan mag je steeds contact opnemen via frederic.hancke@smcb.be.

Een onverwachte link tussen driehoeken en tweedegraadsfuncties

Johan Deprez

Trouwe lezers van Uitwiskeling weten misschien dat redactielid Alexander Holvoet een doctoraatsonderzoek uitvoert over logica en bewijzen, begeleid door prof. Wim Van Dooren en redactieleden Filip Moons en mezelf. Onlangs wees Wim op een boek van de National Council of Teachers of Mathematics over bewijzen (Ellis e.a., 2012). In het kader van het doctoraatsonderzoek bleek het bij nader inzien niet onmiddellijk bruikbaar, maar voor toepassing in de klaspraktijk is het juist wel interessant. Daarom ben ik van plan om er een bespreking van te maken voor de bibwijzer. Maar in dit spinnenwebartikel zoom ik alvast in op een klein onderdeel van het boek dat ik zelf verder uitwerk: een interessante eigenschap die een mooi en onverwacht verband legt tussen leerinhouden uit de meetkunde en uit de studie van functies die op het programma staan in de tweede graad van het secundair onderwijs.

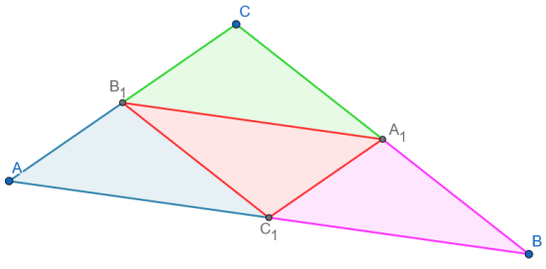


Figuur 1 *– Gelijkzijdige driehoek met vier kleinere driehoeken*

Een bekende eigenschap en een vraag naar veralgemening

We starten met de gekende en intuïtief duidelijke eigenschap van gelijkzijdige driehoeken uit Figuur 1: als je de middens van de zijden verbindt, ontstaan er vier kleinere driehoeken, die gelijkvormig zijn met de oorspronkelijke driehoek. Hun zijden zijn half zo lang als die van de oorspronkelijke driehoek en hun oppervlakte is een kwart.

Uit de eigenschap van de middenparallel volgt dat bovenstaande eigenschap meer algemeen geldt (zie Figuur 2): ook als je in een willekeurige driehoek de middens van de zijden verbindt, ontstaan er vier driehoeken die gelijkvormig zijn met de oorspronkelijke driehoek. Ook hier zijn hun zijden half zo lang en is hun oppervlakte een kwart van de oppervlakte van de oorspronkelijke driehoek.

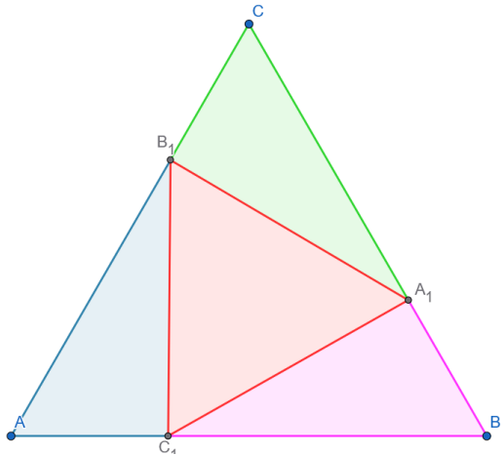


Figuur 2 *– Willekeurige driehoek met vier kleinere driehoeken*

In het boek uit de inleiding wordt gevraagd om te onderzoeken wat er gebeurt als we de zijden volgens een andere vaste verhouding in twee delen, dus: niet in het midden, maar bijvoorbeeld volgens een verhouding 1/3 : 2/3 (waarbij we telkens eerst een stuk van 1/3 nemen als we de drie zijden cyclisch doorlopen, zie Figuur 3 en Figuur 4).

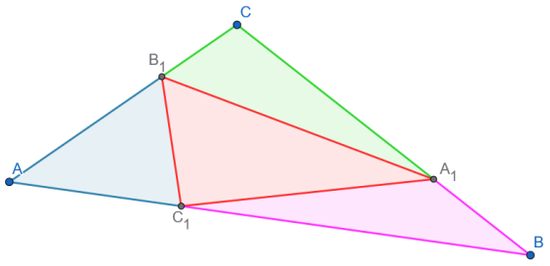
Een eenvoudig en een uitdagender geval

Figuur 3 toont het geval van een gelijkzijdige driehoek. We nemen de zijden gelijk aan 1, omwille van de eenvoud, en zonder afbreuk te doen aan de algemeenheid. De centrale driehoek is nog altijd een gelijkzijdige driehoek. Gebruik bijvoorbeeld de draaisymmetrie van de figuur. Het is op het zicht duidelijk dat zijn oppervlakte nu groter is dan een kwart van de oppervlakte van de oorspronkelijke driehoek. De andere drie driehoeken zijn niet meer gelijkvormig met de oorspronkelijke driehoek en hun oppervlakte is kleiner dan een kwart van de oorspronkelijke oppervlakte. Ze zijn wel nog onderling congruent. Ook dit volgt uit de draaisymmetrie, maar je kunt ook congruentiekenmerken gebruiken: ze hebben alle drie een zijde met lengte 1/3, een zijde met lengte 2/3 en een ingesloten hoek van 60°. En dit kun je dan weer gebruiken om zonder symmetrieoverwegingen in te zien dat de centrale driehoek gelijkzijdig is.



***Figuur 3** – Gelijkzijdige driehoek waarbij de zijden in twee verdeeld worden volgens verhouding* 1/3 : 2/3

Figuur 4 toont een willekeurige driehoek met zijden die we volgens verhouding 1/3 : 2/3 verdeeld hebben. In dit geval is er minder regelmaat te zien: de centrale driehoek is niet meer gelijkvormig met de oorspronkelijke driehoek en de driehoeken errond zijn ook niet meer onderling congruent.

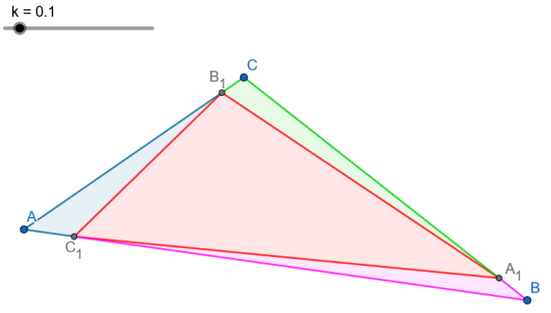


***Figuur 4** – Willekeurige driehoek waarbij de zijden in twee verdeeld worden volgens verhouding* 1/3 : 2/3

Een aangepaste onderzoeksvraag

We maken de opdracht nu preciezer: valt er iets te vertellen over de *oppervlakte* van de vier driehoeken als je de zijden van de driehoek ABC verdeelt volgens verhouding $k : (1-k)$, met k een getal tussen 0 en 1? Nu kun je deze tekst best even aan de kant leggen en zelf aan de slag gaan: op papier, puur in je hoofd of met GeoGebra.

Ongetwijfeld heb je volgende resultaten zelf gevonden. Als je met een vaste driehoek werkt en k laat afnemen van $k = 1/2$ tot $k = 0$, dan lijkt de oppervlakte van de centrale driehoek toe te nemen. Zie Figuur 5 voor het geval $k = 0{,}1$. We weten dat de oppervlakte bij $k = 1/2$ gelijk is aan een kwart van de oppervlakte van de oorspronkelijke driehoek. Bij $k = 0$ is het evident dat de centrale driehoek samenvalt met de oorspronkelijke driehoek. De driehoeken aan de rand nemen in oppervlakte juist af als je k laat afnemen van $k = 1/2$ tot $k = 0$. Bij $k = 0$ zijn ze 'verdwenen'.



***Figuur 5** – Willekeurige driehoek waarbij de zijden in twee verdeeld worden volgens verhouding* 0,1 : 0,9

Ook als je k laat toenemen van $k = 1/2$ tot $k = 1$, neemt de centrale driehoek in oppervlakte toe tot hij de volledige oorspronkelijke driehoek inneemt en nemen de driehoeken aan de rand in oppervlakte af tot ze uiteindelijk verdwijnen.

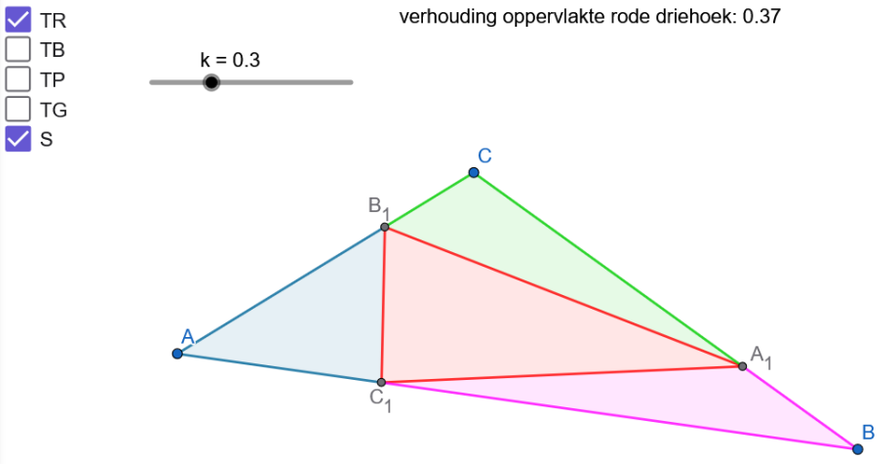
Nog een verdere aanpassing

We maken de opdracht nu nog preciezer. De oppervlakte van de vier driehoeken hangt uiteraard af van de driehoek waarvan je vertrekt. Dat is niet zo handig. Daarom verleggen we de aandacht naar de *verhouding* van de oppervlakte van de vier kleine driehoeken tot de oppervlakte van de oorspronkelijke driehoek. Opnieuw tijd om even te experimenteren, beste lezer. Pen en papier, en gedachtenexperimenten schieten nu tekort. Je kunt gebruik maken van een GeoGebrabestand dat je op onze website vindt. Voor gebruik in de klas hebben we dit onderzoek uitgewerkt onder de vorm van de onderstaande lesactiviteit, die je kunt inzetten nadat de aanloop van hierboven in een onderwijsleergesprek aan bod gekomen is.

LESACTIVITEIT

Vier driehoeken in een driehoek

In een willekeurige driehoek ABC verdelen we de drie zijden in twee, volgens een vaste verhouding $k : 1-k$ (met k een getal tussen 0 en 1). Bij het cyclisch doorlopen van de drie zijden nemen we telkens eerst het stuk met lengte k keer de zijde, zoals op de figuur hieronder, waarbij $k = 0{,}3$.



Er ontstaan vier kleinere driehoeken: een centrale driehoek (rood) en drie driehoeken daarrond (blauw, paars en groen). We onderzoeken de verhouding tussen de oppervlakte van de vier kleine driehoeken en die van de oorspronkelijke driehoek. Het GeoGebrabestand toont de driehoeken, de waarde van k en de verhouding van de oppervlakte van de centrale, rode driehoek tot de oppervlakte van de oorspronkelijke driehoek ABC. Met de schuifbalk kun je de waarde van k veranderen.

1 Laat k afnemen van 0,5 tot 0 en let op de verhouding van de oppervlakte van de rode driehoek tot die van de oorspronkelijke driehoek. Doe hetzelfde waarbij je k laat toenemen van 0,5 tot 1. Bevestigt dit het vermoeden dat we in de klas geformuleerd hebben?

✓ *In de klas ontstond het vermoeden dat de oppervlakte van de rode driehoek (en dus ook de verhouding van de twee oppervlaktes) in beide gevallen toenam. Dat blijkt nu ook zo te zijn. In het GeoGebrabestand zien we de verhouding toenemen van* 0,25 *tot* 1 *(in werkelijkheid iets minder omdat de waarden van k om technische redenen begrensd zijn tussen* 0,01 *en* 0,99*).*

2 Geef k nu een vaste waarde naar keuze, maar niet gelijk aan 0,5. Versleep hoekpunt A zodat de grote driehoek een andere vorm krijgt. Let op de verhouding van de oppervlakte van de rode driehoek. Wat stel je vast? Herhaal met enkele andere waarden van k.

✓ *De verhouding verandert niet als je de vorm van de driehoek verandert. De verhouding lijkt dus enkel van k af te hangen en niet van de vorm van de driehoek.*

De tabel geeft een overzicht van de verhouding voor een aantal waarden van k.

k	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
verhouding opp.	1	0,73	0,52	0,37	0,28	0,25	0,28	0,37	0,52	0,73	1

3 Controleer een paar van de verhoudingen met het GeoGebrabestand.

4 Voor $k = 0$ en $k = 1$ kun je het GeoGebrabestand niet gebruiken. Leg uit hoe je dan aan de verhouding komt.

✓ *In beide gevallen valt de rode driehoek samen met de oorspronkelijke driehoek.*

We gaan nu op zoek naar een functie f die het verband tussen k en de verhouding $f(k)$ van de oppervlaktes beschrijft.

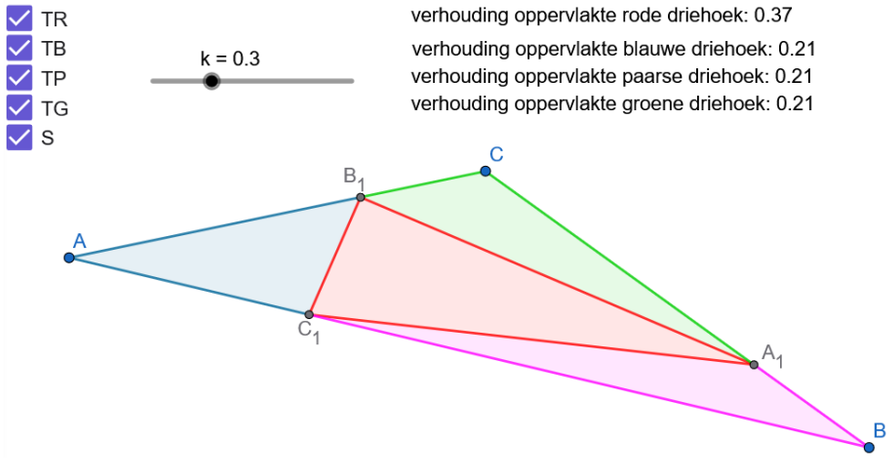
5 Maak (met de hand, met je grafische rekenmachine of met een rekenblad zoals Excel) een figuur waarop je de punten $(k, f(k))$ uit de tabel voorstelt. Heb je een vermoeden over welk type functie het zou kunnen gaan? Beargumenteer je vermoeden.

✓ *De punten lijken op een (dal)parabool te liggen met top* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. *Argumenten: de symmetrie die in de tabel te zien is, er is eerst een daling en daarna een stijging, het begint met een sterke daling maar die wordt minder en minder sterk, …*

6 Probeer nu het functievoorschrift te vinden (met de hand of met behulp van ICT). Controleer of je functievoorschrift klopt voor alle punten uit de tabel.

✓ *Het functievoorschrift is* $f(k) = 3k^2 - 3k + 1$. *Als je het functievoorschrift met de hand opstelt, is het wellicht handig om de k tijdelijk even te vervangen door x. Je kunt vertrekken van de vorm* $y = ax^2 + bx + c$ *en a, b en c bepalen door bijvoorbeeld gebruik te maken van de punten* (0,1), $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ *en* (1,1). *Met ICT kun je een kwadratische regressie laten uitvoeren. Het voorschrift blijkt voor alle punten exact te kloppen.*

We keren tot slot nog even terug naar het GeoGebrabestand. Vink de vakjes bij TB, TP en TG aan.



Je ziet in de bovenstaande figuur nu ook hoe de oppervlakte van de blauwe, paarse en groene driehoek zich verhoudt tot de oppervlakte van de oorspronkelijke driehoek. Jouw driehoek zal er ongetwijfeld anders uitzien, maar je weet ondertussen dat dit geen belang heeft voor de verhoudingen. We doen een opmerkelijke vaststelling: hoewel de blauwe, paarse en groene driehoek een heel verschillende vorm hebben, blijken ze toch even groot te zijn in oppervlakte! Als de waarde van k verandert, verandert de waarde van deze verhoudingen, maar ze blijven onderling aan elkaar gelijk.

7 Gebruik deze merkwaardige vaststelling en de functie f uit de vorige opdracht om nu ook een functie g te vinden die het verband beschrijft tussen k en de verhouding $g(k)$ van de oppervlakte van deze drie driehoeken tot de oppervlakte van de oorspronkelijke driehoek.

✔ *De som van de vier verhoudingen moet uiteraard* 1 *zijn, zodat* $f(k)+3\cdot g(k)=1$. *Hieruit volgt dat*

$$g(k)=\frac{1}{3}(1-f(k))=\frac{1}{3}(1-(3k^2-3k+1))=-k^2+k.$$

En dan eindelijk: een bewijs

De experimenten en berekeningen uit de lesactiviteit vormen de basis voor sterke vermoedens, maar ze zijn niet voldoende als wiskundig bewijs. Naar een bewijs dat wel voldoet, gaan we nu op zoek.

Voor de centrale driehoek zijn er niet onmiddellijk beloftevolle aanknopingspunten. We zien geen eenvoudig verband tussen de hoeken van de rode driehoek en die van de oorspronkelijke driehoek. Ook een elegante uitdrukking voor de zijden lijkt buiten bereik. Uiteraard: behalve als $k=1/2$.

Voor de buitenste driehoeken gaat het beter. We maken de redenering voor de blauwe driehoek: voor de oppervlakte van de oorspronkelijke driehoek nemen we de helft van het product van de zijden $|AB|$ en $|AC|$ en de sinus van de ingesloten hoek, en voor de oppervlakte van de blauwe driehoek werken we met de zijden $|AC_1|$ ($|AB|$ maal k) en $|AB_1|$ ($|AC|$ maal $1-k$), die dezelfde hoek insluiten. De oppervlakte van de blauwe driehoek is dan gelijk aan $k(1-k)$ maal de oppervlakte van de oorspronkelijke driehoek, precies wat we in de lesactiviteit op experimentele manier vonden. Voor de paarse en de groene driehoek gaat het analoog: ook hier krijgen we zijden die met een factor k, respectievelijk $1-k$ vermenigvuldigd worden en een ingesloten hoek die gelijk blijft. De verhouding voor de rode driehoek kunnen we nu tot slot eenvoudig berekenen: $1-3k(1-k)=3k^2-3k+1$, zoals in de lesactiviteit.

Een meerwaarde van de bovenstaande redenering ten opzichte van de experimentele aanpak uit de lesactiviteit is dat ze ons een dieper inzicht geeft in de eigenschap, bijvoorbeeld hoe het komt dat de vorm van de grote driehoek niet uitmaakt, hoe we aan de twee factoren in de verhouding komen en hoe het komt dat we voor de drie buitenste driehoeken dezelfde verhouding vinden.

Hiermee ronden we het gedeelte van het artikel af dat je kunt gebruiken in de tweede graad. Tegelijk nodigen we lezers met interesse voor meer wiskundige diepgang uit om vooral verder te lezen.

Een elementair meetkundeprobleem vanuit een hoger standpunt bekeken

De titel van deze paragraaf is een parafrase van de titel van een boek van de beroemde wiskundige Felix Klein (1849-1925), die zich ook met wiskundedidactiek bezighield: Elementarmathematik Vom Höheren Standpunkte Aus (Klein, 1908). Dat is precies wat we in deze paragraaf willen doen: het elementaire meetkundeprobleem uit de vorige paragrafen bekijken vanuit een meer gevorderd perspectief. Dit is niet langer spek voor de bek van de leerling. Leraren die de opleiding wiskunde aan de universiteit gevolgd hebben, zullen ongetwijfeld delen uit dat hogere standpunt herkennen, terwijl het voor leraren met een andere achtergrond mogelijk volledig nieuw is.

Voor ons doel gaan we te rade bij een eerdere publicatie van Klein: zijn Erlangen Programm (Klein, 1872), waarin hij meetkunde en groepentheorie bij elkaar bracht. Klein beschreef meetkunde als de studie van begrippen en eigenschappen die behouden blijven onder een groep van transformaties. Voor de vertrouwde Euclidische meetkunde gaat het dan over de groep van de isometrieën. Zoals de naam het uitdrukt, zijn dat de afstandsbewarende transformaties. Het is niet moeilijk om te zien dat ze dan meteen ook hoeken bewaren. Voorbeelden van isometrieën in het vlak zijn verschuivingen, spiegelingen om een rechte en draaiingen. Het begrip ‘gelijkzijdige driehoek’ is in de benadering van Klein een begrip uit de Euclidische meetkunde omdat isometrieën gelijkzijdige driehoeken op gelijkzijdige driehoeken afbeelden.

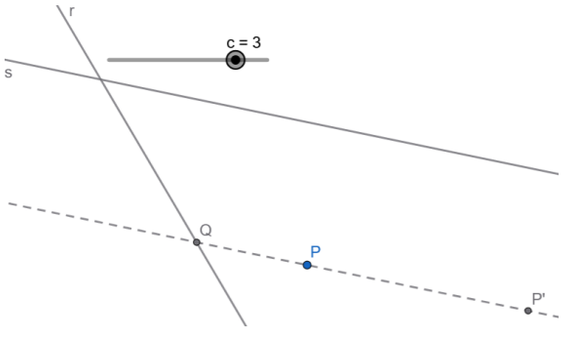
In het meetkundeprobleem dat we besproken hebben, zullen sommige lezers het begrip deelverhouding herkend hebben. Een deelverhouding drukt uit in welke delen een lijnstuk gedeeld wordt door een derde punt. Preciezer, en toegepast op ons probleem: de deelverhouding (ABC_1) is

$$(ABC_1)=\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}=\frac{k\overrightarrow{AB}}{(1-k)\overrightarrow{AB}}=\frac{k}{1-k}.$$

(Het derde punt mag ook in het verlengde van het lijnstuk liggen i.p.v. op het lijnstuk zelf, wat een negatieve deelverhouding oplevert, maar dat is voor ons probleem niet van belang.)

Deelverhouding is een begrip uit de zogenaamde *affiene* meetkunde, de meetkunde die bepaald wordt door de groep van de affiene transformaties. Overigens kwam de affiene meetkunde niet voor in het Erlangen Programm van Klein, dat zich naast de Euclidische meetkunde richtte op de hyperbolische en elliptische meetkunde, maar dit terzijde.

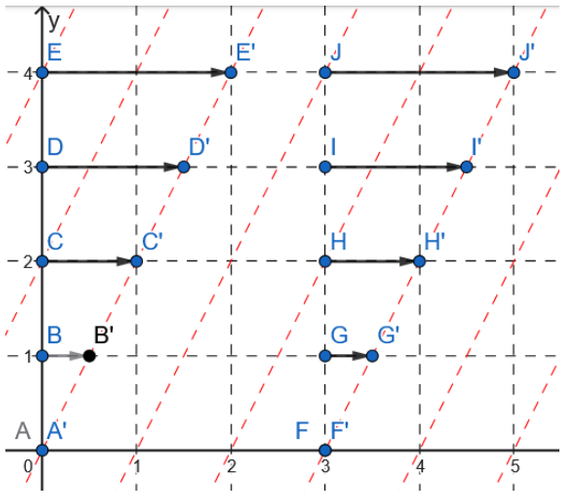
De groep van de affiene transformaties omvat die van de isometrieën, maar is ruimer. De horizontale en verticale vermenigvuldiging (uitrekking of samendrukking) die je kent van bij de studie van functies, zijn affiene transformaties die geen isometrieën zijn (behalve natuurlijk in het triviale geval dat we vermenigvuldigen met 1 of -1). In wat volgt, maken we gebruik van ('schuine') lijnvermenigvuldigingen, die hiervan een veralgemening zijn. Zo'n lijnvermenigvuldiging wordt gekenmerkt door een rechte r van punten die op zichzelf afgebeeld worden (de 'lijn' uit de naam), een tweede rechte s, niet evenwijdig met r, en een factor c (zie Figuur 6). Het beeld van een punt P is het punt P' waarvoor geldt dat $\overrightarrow{QP'} = c\overrightarrow{QP}$, met Q de schuine projectie van P op r volgens de richting bepaald door s.



Figuur 6 *– Lijnvermenigvuldiging ten opzichte van de rechte r met richting bepaald door de rechte s en met factor $c = 3$*

Een andere affiene transformatie is de afschuiving. We beperken ons hier tot de afschuiving die we verderop nodig hebben en die getoond wordt in Figuur 7. We beschrijven ze in termen van coördinaten: (x,y) wordt afgebeeld op $(x + c \cdot y, y)$ voor een gegeven waarde van c (in de figuur: $c = 0{,}5$).

In het algemeen: affiene transformaties zijn de transformaties met een matrixvoorstelling van de vorm $X \mapsto AX + B$, waarbij A een 2×2-matrix is met determinant niet nul en B een 2×1-matrix.



Figuur 7 *– Voorbeeld van een afschuiving*

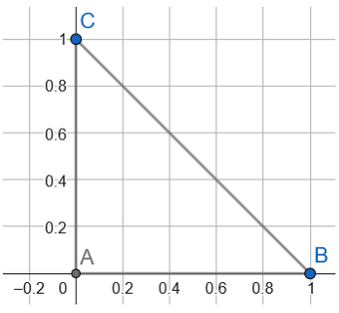
Omdat de groep van affiene transformaties groter is dan die van de isometrieën, worden minder eigenschappen behouden en is de affiene meetkunde 'armer' dan de Euclidische meetkunde. Zo behouden affiene transformaties geen afstanden en hoeken. Ze behouden wel verhoudingen van twee afstanden 'in dezelfde richting'. Met andere woorden: ze behouden deelverhoudingen. Deelverhouding is dus een affien begrip. Ook 'vector', 'midden van twee punten' en 'evenwijdigheid van rechten' zijn affiene begrippen. Minder bekend is dat ook ´verhoudingen van oppervlaktes van vlakke figuren' zijn affien: affiene transformaties veranderen de oppervlakte, maar steeds met dezelfde factor $|\det(A)|$.

Het is het samenspel tussen deelverhouding en verhouding van oppervlaktes dat me bij het driehoekenprobleem aan affiene meetkunde deed denken. In het boek werd de eigenschap aanvankelijk enkel geformuleerd voor gelijkzijdige driehoeken, maar ik had onmiddellijk het gevoel dat hij ook voor willekeurige driehoeken waar moest zijn, en deze algemenere versie kwam effectief ook later in het boek voor. Dit laat ons vermoeden dat het interessant zou kunnen zijn om het driehoekenprobleem te bekijken met een affiene bril.

Het startpunt is dat alle driehoeken affien gesproken equivalent zijn. Om dit in te zien, gebruiken we de bijzondere driehoek uit Figuur 8, die rechthoekig en gelijkbenig is met benen van lengte 1.

We kunnen elke andere driehoek vormen door een gepaste affiene transformatie toe te passen op deze driehoek: kies vooreerst twee zijden van de (doel)driehoek, pas nu eerst een afschuiving toe op de driehoek uit Figuur 8 om de hoek tussen de

twee benen gelijk te maken aan de hoek tussen de twee gekozen zijden van de doeldriehoek en pas vervolgens de lengte van de benen aan via twee gepaste schuine lijnvermenigvuldigingen. De driehoek heeft nu de gewenste vorm en grootte. Met een verschuiving en een rotatie breng je de driehoek dan tot slot nog op de juiste positie in het vlak.

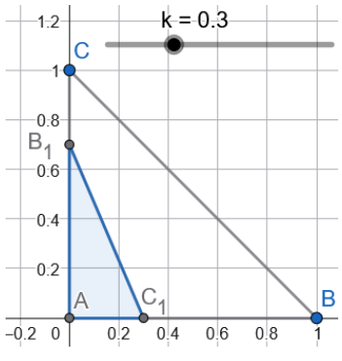


***Figuur 8** – Een speciale driehoek*

Belangrijk in het licht van ons probleem is dat deze samenstelling van affiene transformaties bovendien onze verdeling van de zijden behoudt: ook na de transformatie zullen de zijden volgens verhouding $k : 1-k$ verdeeld zijn. Ook verhoudingen van oppervlaktes worden door deze samenstelling van affiene transformaties behouden. Dit levert ons een belangrijk voordeel op voor het bewijs van de eigenschap: het volstaat om de eigenschap te bewijzen voor één driehoek, bijvoorbeeld een gelijkzijdige driehoek of, wat we hier zullen doen: de driehoek in Figuur 8!

Het kan nog beter: voor (om het even welke) driehoek ABC bestaat er een affiene transformatie die de driehoek op zichzelf afbeeldt, maar de hoekpunten cyclisch doorschuift. Met andere woorden: er bestaat een affiene transformatie die A afbeeldt op B, B op C en C op A. Dat gaat bijvoorbeeld als volgt: beeld de driehoek uit Figuur 8 met een affiene transformatie af op driehoek ABC, beeld diezelfde driehoek uit Figuur 8 met een andere affiene transformatie af op BCA, inverteer de eerste transformatie en stel samen met de tweede. De resulterende affiene transformatie is dus een affiene symmetrie van de driehoek: een affiene transformatie die de driehoek op zichzelf afbeeldt. Je kunt ze zien als de affiene evenknie van de draaisymmetrie van de gelijkzijdige driehoek. Anders uitgedrukt: de symmetrie die in de Euclidische meetkunde enkel van toepassing is voor gelijkzijdige driehoeken, is in de affiene meetkunde voor elke driehoek van toepassing, weliswaar enkel voor affiene eigenschappen van de driehoek. In het Euclidische geval verklaarde de draaisymmetrie waarom de drie buitenste driehoeken bij een gelijkzijdige driehoek congruent zijn met elkaar. In het affiene geval verklaart de affiene symmetrie waarom de verhouding van hun oppervlaktes (een affiene eigenschap!) dezelfde is voor een willekeurige driehoek.

De affiene symmetrie heeft ook een praktisch gevolg dat het bewijs van de eigenschap over de verhouding van oppervlaktes nog verder vereenvoudigt: niet enkel is het voldoende om ons te beperken tot de ene driehoek uit Figuur 8, maar we hoeven de eigenschap bovendien enkel te bewijzen voor *één van de* buitenste driehoeken, bijvoorbeeld de blauwe rechthoekige driehoek linksonder in Figuur 9. En dat is een fluitje van een cent!



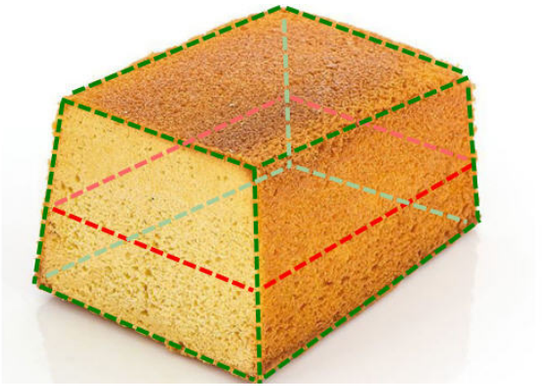
***Figuur 9** – De speciale driehoek met daarin de blauwe driehoek*

BRONNEN

Ellis, A.B., Bieda, K., & Knuth, E. (2012). *Developing Essential Understanding of Proof and Proving for Teaching Mathematics in Grades 9-12*, Reston: The National Council of Teachers of Mathematics, ISBN 978-0-87353-675-2.

Klein, F. (1872). *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*. Erlangen: Deichert. Zie ook: https://www.gutenberg.org/files/38033/38033-h/38033-h.htm

Klein, F. (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus.*, Leipzig: Teubner.



Een hotelcake horizontaal halveren

Antonella Perucca
Luc Van den Broeck

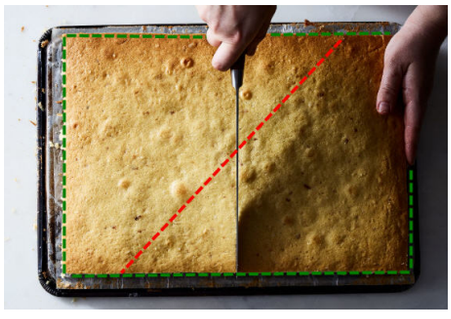
In recreatieve wiskundepuzzels is het verdelen van een stuk land in percelen met gelijke oppervlakte en gelijke vorm een klassiek thema. Ook het verdelen van een cake kadert in ditzelfde thema.

Dit artikel focust op cakes met een perfecte geometrische vorm. Het deeg moet bovendien ook homogeen verspreid worden, alsook de eventuele inwendige stukjes appel of chocoladebolletjes die smaak aan de cake geven. Het is redelijk eenvoudig om een ronde, vierkante of driehoekige cake met één *verticale* messnede te halveren. Hier gaan we snel over. Moeilijker is het om een hotelcake (die een trapeziumvormige dwarsdoorsnede heeft zoals je ziet in de bannerfoto) met een *horizontale* messnede te halveren om er bijvoorbeeld een laagje roomboter tussen te smeren. Dat is het kernprobleem van dit spinnenwebartikel.

Beide problemen worden opgelost met vlakke meetkunde. De nodige voorkennis is het oplossen van vierkantsvergelijkingen en, als je dieper wilt graven, het genereren van Pythagoreïsche drietallen.

Verticaal halveren van een cake

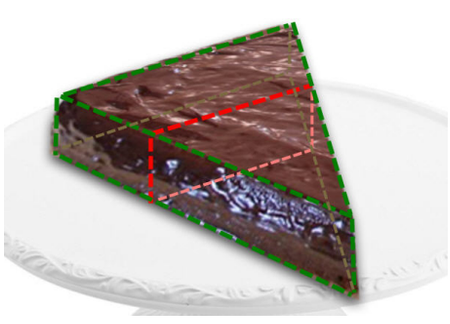
De meeste cakes die we kopen zijn rond of rechthoekig. Deze vlakke vormen zijn makkelijk met één verticale messsnede in twee gelijke delen te verdelen. Ze hebben immers een symmetriemiddelpunt. Elke rechte snede door dit symmetriemiddelpunt verdeelt de cake in twee congruente delen, zoals de rode streepjeslijn exemplarisch aangeeft in Figuur 1. Mochten er ooit cakes ontworpen worden in de vorm van een parallellogram, een regelmatige zeshoek of nog gekkere vormen met een symmetriemiddelpunt, dan kunnen we op dezelfde manier tewerk gaan.



Figuur 1 *– De messnede hoeft niet parallel met een zijde te lopen*

Een driehoekige cake heeft geen symmetriemiddelpunt. Maar ook hierbij is het tweeëndelen makkelijk. Elke snede volgens een zwaartelijn van de driehoek is geschikt.

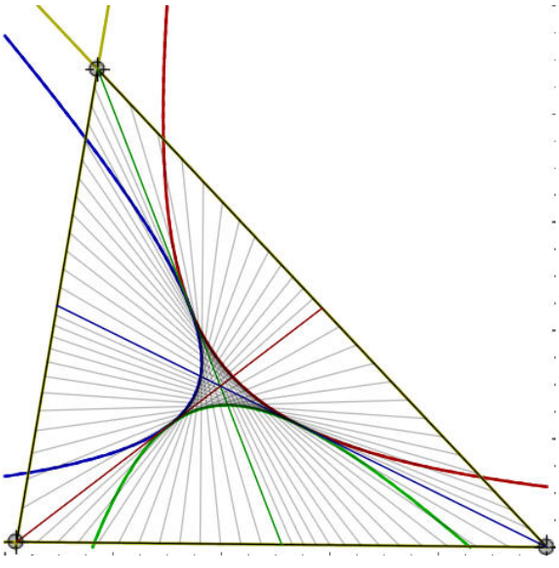
Een andere mogelijkheid is een snede die evenwijdig loopt met een zijde van de driehoek, zoals in Figuur 2. Het afgesneden puntje is dan een driehoek die gelijkvormig is met de oorspronkelijke driehoek. De verhouding van de oppervlakte van deze twee driehoeken is gelijk aan 2. De verhouding van de hoogten van deze driehoeken is bijgevolg gelijk aan $\sqrt{2}$.



Figuur 2 *– Een snede evenwijdig met een zijde van de driehoek*

Maar wat weten we als we in een willekeurige andere richting willen snijden? Ook dan vinden we een gepaste snede. Dit leggen we hier even uit. Begin in een vaste richting te snijden dicht bij een tipje van de cake. Het afgesneden stukje is nu kleiner dan de helft van de cake. Als je de messnede evenwijdig opschuift, dan zal de oppervlakte van het afgesneden stukje monotoon stijgen. Deze stijging gebeurt zonder sprongen te maken, op een continue wijze dus. Als je het bakkersmes evenwijdig blijft opschuiven, zal de oppervlakte van het afgesneden stukje groter worden dan de helft van de cake. Ergens tussendoor moet het banketbakkersmes de ideale positie gepasseerd zijn.

Alle rechten die een driehoek perfect in twee verdelen, kunnen we visualiseren met de drie hyperboolstukjes van Figuur 3 die een *deltoïde* afbakenen. We bewijzen het hier niet maar elke rechte die aan één van deze drie krommen raakt, is een perfecte tweeëndeler.



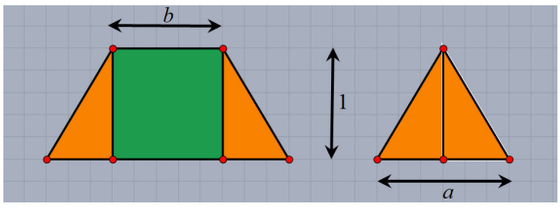
***Figuur 3** – Drie hyperbolen die een deltoïde afbakenen*

Horizontaal halveren van een hotelcake

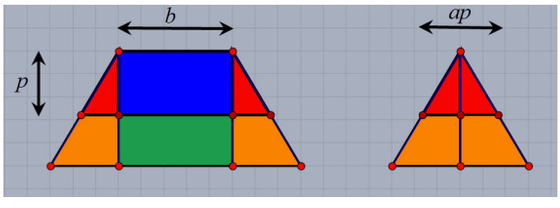
Dit probleem bouwen we op vanuit het standpunt van de leerkracht. Hij probeert op een ruitjesblad de dwarsdoorsnede van een hotelcake te tekenen die aan de volgende voorwaarde voldoet. Zowel de grote basis als de kleine basis, de totale hoogte en de hoogte van de horizontale messnede moeten gehele getallen zijn. Zo ontstaat er voor de leerlingen een cakeverdelingsprobleem dat makkelijk zonder zakrekenmachine kan opgelost worden.

Om de positie van de messnede te bepalen, moeten de leerlingen dan een eenvoudige vierkantsvergelijking oplossen, zie verderop.

Zoals je ziet in Figuur 4 beschouwen we de trapeziumvormige dwarsdoorsnede van de cake als een rechthoek, ingesloten door twee congruente rechthoekige driehoeken. De breedte van de rechthoek noemen we b en de hoogte stellen we gelijk aan 1. (Verderop zullen we de figuur nog verticaal uitrekken tot de hoogte gelijk is aan een ander geheel getal.) De som van de basissen van de rechthoekige driehoeken noemen we a.



***Figuur 4** – De afmetingen van het trapezium*



***Figuur 5** – De afmetingen van het bovenste trapezium*

We maken een horizontale snede op een afstand p van de kleine basis van het trapezium. Deze snede bakent een kleiner trapezium af dat ook weer bestaat uit een rechthoek, ingesloten door twee kleinere rechthoekige driehoeken. Door gelijkvormige driehoeken te gebruiken, kunnen we berekenen dat de som van de basissen van deze driehoeken is gelijk aan ap.

Met de formule van de oppervlakte van een trapezium berekenen we vervolgens de oppervlakte van het kleine trapezium:

$$p \cdot \left(b + \frac{ap}{2} \right)$$

en de oppervlakte van het volledige trapezium:

$$1 \cdot \left(b + \frac{a}{2} \right).$$

De eerste oppervlakte moet de helft van de tweede zijn. Dit vertalen we als:

$$p \cdot \left(b + \frac{ap}{2} \right) = 1 \cdot \left(\frac{b}{2} + \frac{a}{4} \right)$$

waaruit volgt dat:

$$\frac{a}{2}\cdot p^2 + b\cdot p - \left(\frac{b}{2}+\frac{a}{4}\right) = 0.$$

Als we ervoor zorgen dat de discriminant van deze vierkantsvergelijking een volkomen kwadraat is, dan is p rationaal. En met een kleine ingreep (een verticale uitrekking, zie verderop) zorgen we er nadien dan voor dat de hoogte van het bovenste trapezium een geheel getal is.

Je kunt narekenen dat de discriminant van deze vierkantsvergelijking gelijk is aan de som van twee kwadraten:

$$\left(b+\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

De som van twee kwadraten moet dus een kwadraat van een geheel getal zijn. En dat is het geval bij de drietallen van Pythagoras. Deze link had je hier misschien ook al gelegd ... Omdat $\frac{a}{2}$ geheel is, moet a een even geheel getal zijn.

Enkele voorbeelden van mooie hotelcakes

De eenvoudigste voorbeelden van drietallen van Pythagoras (k,l,m) (met $k,l,m \in \mathbb{N}_0$ en $k^2+l^2=m^2$) zijn

$$(3,4,5), (5,12,13), (8,15,17), (7,24,25)...$$

Nemen we eerst het drietal (3,4,5) onder de loep. Dit drietal geeft aanleiding tot het stelsel:

$$\begin{cases} b+\frac{a}{2}=4 \\ \frac{a}{2}=3 \end{cases}$$

Hieruit leiden we af dat de kleine basis van het trapezium (b) gelijk is aan 1 en de grote basis $(b+a)$ gelijk is aan 7. De vierkantsvergelijking is nu van de vorm:

$$3p^2+p-2=0.$$

De positieve oplossing van deze vierkantsvergelijking is $p=\frac{2}{3}$. Door het oorspronkelijke trapezium verticaal uit te rekken, kunnen we ervoor zorgen dat de hoogte van het bovenste trapezium een geheel getal is. Er zijn verschillende mogelijkheden voor zulke uitrekking. Bij een hoogte $H=6$ van de hotelcake bijvoorbeeld hoort een hoogte $h=4$ van de bovenste laag. Het trapezium dat dan ontstaat, zie je in Figuur 6 links. Alle aangeduide punten van deze dwarsdoorsnede liggen netjes op roosterpunten met gehele coördinaten. Uit wiskundig standpunt een perfecte hotelcake.

Analoog vinden we voor het drietal (5,12,13) het stelsel:

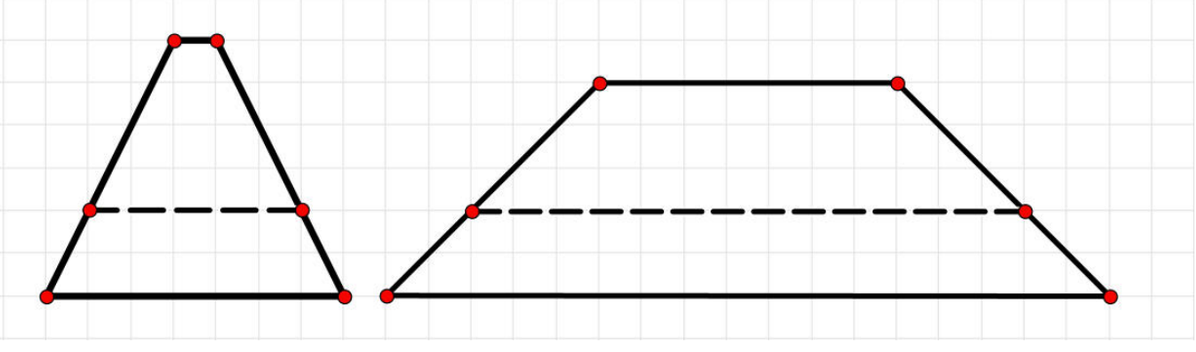
$$\begin{cases} b+\frac{a}{2}=12 \\ \frac{a}{2}=5 \end{cases}$$

met als oplossing $a=10$ en b=7. De kleine basis van het trapezium is dus gelijk aan 7, de grote basis is gelijk aan 17.

De vierkantsvergelijking:

$$5p^2+7p-6=0.$$

heeft als positieve oplossing $p=\frac{3}{5}$. Verticaal herschalen naar een hoogte $H=5$ voor de hotelcake, geeft een hoogte $h=3$ voor de bovenste laag. Deze hotelcake zie je in Figuur 6 rechts.



Figuur 6 *– Twee trapezia die mooi horizontaal gehalveerd kunnen worden*

Verder onderzoek ...

De bovenstaande redenering werkt ook voor ongelijkbenige trapezia met twee scherpe hoeken bij de grote basis en zelfs voor rechthoekige trapezia. In dit laatste geval bestaat het trapezium uit een rechthoek die slechts aan één kant geflankeerd is door een rechthoekige driehoek.

Een lichtjes andere redenering moet gebruikt worden als het gaat over trapezia met een scherpe en een stompe hoek bij de grote basis. We werken dit geval hier niet uit maar laten het als oefening over aan de lezer. Deze afleiding is trouwens alleen voor wiskundigen relevant. Bakkers en patissiers zijn wellicht niet geïnteresseerd in stomphoekige hotelcakes.

Tot slot werpen we nog op dat de redenering met de drietallen van Pythagoras geen oplossing biedt als je van de hotelcake een derde bovenaan wil wegsnijden. Het lukt wel als je een vijfde wil wegsnijden. Met één velletje blanco papier en een rustig moment om te puzzelen kom je wel achter het waarom. Succes met het verder onderzoek ...

BRONNEN

Chaitanya's Random Pages. Cutting a triangle in half.
https://ckrao.wordpress.com/2016/02/27/cutting-a-triangle-in-half/

Triangle area bisectors. https://demonstrations.wolfram.com/TriangleAreaBisectors/



Drie jonge wiskundigen tackelen oude, onopgeloste problemen van Paul Erdős (3)

Stijn Cambie, Wouter van Doorn en Sam Mattheus

Inleiding

Paul Erdős (1913-1996) wordt met zijn 1525 papers als een van de grootste, of minstens meest gepassioneerde wiskundigen ooit gezien. Hij stelde dan ook heel veel vragen die hem fascineerden, velen nog steeds onopgelost, nu zelfs bijna 30 jaar na zijn dood. In de recente jaren zijn er drie onderzoekers uit de Lage Landen die zo'n probleem hebben opgelost. Voor zover wij weten zijn wij de enigen.

Problemen die gesteld zijn door Erdős zijn automatisch minstens 28 jaar oud. Maar de drie specifieke vragen die onlangs opgelost werden zijn bijna 50 jaar geleden voor het eerst gesteld. Het gebeurt niet vaak dat problemen die zo lang stand houden toch gekraakt worden. Daarom willen we in drie opeenvolgende verhalen beschrijven hoe zulke ontdekkingen tot stand komen. In dit laatste spinnenwebartikel komt Wouter van Doorn aan het woord.

Onder wiskundigen is er een recente traditie om auteurs een Erdősnummer toe te kennen. Wie ooit als coauteur met Erdős een artikel geschreven heeft, krijgt Erdősnummer 1. Wie samen publiceerde met een auteur met Erdősnummer 1 maar niet zelf met Erdős gepubliceerd heeft, krijgt Erdősnummer 2 enz. Op het internet vind je een Erdőscalculator waarop je het Erdősnummer van wiskundigen over de hele wereld kunt opzoeken, bijvoorbeeld:

MR Collaboration Distance = 2

Cambie, Stijn	coauthored with	Alon, Noga	MR4346745
Alon, Noga	coauthored with	Erdős, Paul[1]	MR1899117

Figuur 1 *– De kortste publicatie-afstand van Stijn Cambie tot Paul Erdős*

Er zijn 509 wetenschappers met Erdősnummer 1. Om evidente redenen zal iemand met Erdősnummer 2 nooit meer Erdősnummer 1 kunnen krijgen.



Hoe het voor mij begon

Paul Erdős heeft in zijn leven vele verhandelingen geschreven waarin hij (veelal door hemzelf of co-auteurs bedachte) onopgeloste wiskundeproblemen beschreef, in de hoop dat anderen hierdoor

geïnspireerd zouden raken om ze op te lossen. De meest invloedrijke hiervan was waarschijnlijk een boek dat hij samen met Ronald Graham schreef: ´Oude en nieuwe problemen en resultaten in de combinatorische getaltheorie'. Dit boek is in de afgelopen 45 jaar al meer dan 400 keer geciteerd en het is ook de inspiratiebron geweest voor meerdere van mijn eigen artikelen.



***Figuur 2** – Paul Erdős en de echtgenoten Graham in 1968*

Ik heb altijd al een fascinatie gehad voor puzzels, raadsels en getallen. Het boek van Erdős en Graham is hiervoor een ware goudmijn. Meer dan 100 pagina's waar elke paar zinnen weer een nieuw probleem wordt beschreven. Voor de overgrote meerderheid van deze problemen heb ik geen enkel idee hoe ik er aan moet beginnen. Maar omdat het boek zo ontzettend vol staat, is de kans groot dat je (als je hierin geïnteresseerd bent) vanzelf wel een keer een vraagstuk tegenkomt waarbij er wél een idee in je opkomt.

En dat is precies wat er bij mij gebeurde. Ik las één klein zinnetje, met een ogenschijnlijk eenvoudige vraag over het optellen van breuken. En ik bedacht dat ik in ieder geval een aantal voorbeelden zou kunnen uitrekenen om hiermee wat intuïtie voor het probleem te kweken. Zo hoopte ik enkele patronen te ontdekken. En zo begon ik aan een onderzoek dat heel veel langer zou duren dan ik op dat moment kon vermoeden.

In de jaren nadat ik voor het eerst in aanraking kwam met dit probleem heb ik meermaals gedacht ´oké, ik ben klaar; mijn artikel is af.' Om niet veel later tóch weer iets nieuws of beters te bedenken waardoor ik, vaker dan ik zou willen toegeven, weer helemaal opnieuw begon.

Bovendien heb ik een (voor wiskundigen) ongewoon carrièrepad gevolgd en ben ik na mijn master niet de academische wereld in gegaan. Hierdoor doe ik al het onderzoek in mijn vrije tijd, wat ervoor zorgt dat alles soms wat trager gaat dan ik zou willen. Vorig jaar vond ik echter dat het nu écht tijd werd om mijn artikel af te ronden. Ik heb besloten om zes maanden onbetaald verlof op te nemen van mijn normale werk om volledig te kunnen focussen op het afmaken van wat inmiddels mijn levenswerk was geworden. En zo heb ik vorig jaar, na meer dan 14 jaar over hetzelfde probleem te hebben nagedacht, eindelijk mijn artikel afgemaakt. Dus laat ik daar wat over vertellen.

Sommen van breuken

Kijken we eerst naar sommen als $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ die we als onvereenvoudigbare breuk zullen schrijven. In dit voorbeeld zou de som $\frac{77}{60}$ zijn, wat met enig geduld gecontroleerd kan worden door de noemers in de som gelijk te maken. In het algemeen zul je zien dat de noemer van de resulterende breuk (in dit geval dus 60) groter wordt, naarmate het aantal breuken dat we optellen groter wordt. Zo geldt bijvoorbeeld dat $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ (met 6 als noemer), dat $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}$ (met 12 als noemer), en dat $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{77}{60}$ (met 60 als noemer). Het interessante is echter dat de stijging niet altijd opgaat! Gaan we nog één stapje verder, voegen we ook $\frac{1}{6}$ toe, en kijken we hiermee naar de som $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$, dan blijkt deze som gelijk te zijn aan $\frac{29}{20}$! En 20 is kleiner dan 60. Hoewel we meer breuken optelden, is de noemer van de resulterende breuk plots gedaald.

In het voorgaande voorbeeld begonnen we bij $\frac{1}{2}$ en maakten de som van breuken steeds groter, waarbij de noemer van de resulterende breuk daalde op het moment dat we bij $\frac{1}{6}$ aankwamen. Maar wat als we niet bij $\frac{1}{2}$ waren begonnen, maar bij $\frac{1}{3}$? Of bij $\frac{1}{4}$? Of bij $\frac{1}{1000}$? Zal er altijd een keermoment komen waarop de noemer kleiner wordt? Dát was het vraagstuk van Erdős en Graham dat door zijn eenvoud mijn interesse wekte. 'Alles wat we doen, is breuken optellen. Hoe moeilijk kan het zijn?', dacht ik.

Het verrassende aan dit verhaal: het bleek ook niet zo ingewikkeld te zijn! Na twee daagjes nadenken en met de computer enkele voorbeelden te hebben gecontroleerd, kwam ik achter het volgende. Stel dat we de som bij $\frac{1}{a}$ beginnen en stel 3^k een macht van 3 zodat $3^k \geq a$. Als we nu b gelijkstellen aan $2\cdot 3^k$, dan blijkt de noemer van de som $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\ldots+\frac{1}{b}$ altijd kleiner te zijn dan de noemer van de som $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\ldots+\frac{1}{b-1}$. Zo vinden we bijvoorbeeld dat de breuk $\frac{1}{54}$ een kantelpunt is als de rij begint met de breuk $\frac{1}{25}$ en dat de breuk $\frac{1}{162}$ een kantelpunt is als de rij begint met $\frac{1}{79}$.

Het antwoord op de vraag van Erdős en Graham is dus ja. Waar we ook met onze som beginnen, er komt altijd een kantelpunt waarop de noemer een keer kleiner wordt. En bovendien geeft de keuze van $b = 2 \cdot 3^k$ een bovengrens voor hoe groot we de som moeten maken voordat de noemer voor het eerst daalt. Overigens is dit voor de meeste a niet het allereerste kantelpunt en staat de vraag wat in het algemeen dan wel het eerste kantelpunt is, nog helemaal open!

Verder dan het oorspronkelijke probleem van Erdős

Hoewel het oorspronkelijke vraagstuk opgelost was, bleek dit slechts het minuscule begin te zijn van iets dat me nog jaren bezig zou houden. Nadat ik mijn oorspronkelijke bewijs netjes had uitgewerkt en opgeschreven, heb ik dit naar de Amerikaanse wiskundige Ernie Croot opgestuurd. Hij had zich namelijk met vergelijkbare problemen bezig gehouden en ik dacht dat hij geïnteresseerd zou kunnen zijn. Ernie Croot was vervolgens zo vriendelijk om op mijn e-mail te reageren, een mail van een onbekende eerstejaars bachelorstudent wiskunde uit Nederland. Dit stimuleerde me al op zeer jonge leeftijd om verder onderzoek te doen.

Het idee van Ernie Croot was als volgt. In het oorspronkelijke probleem tellen we altijd breuken als $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ en $\frac{1}{4}$ op die telkens 1 als teller hebben. Maar wat als die tellers ook een andere waarde mogen hebben? Kunnen we dan nog steeds concluderen dat er een moment komt waarop de noemer van de som een keer daalt? En zo ja, wat kunnen we dan zeggen over het eerste moment waarop dat gebeurt?

Dus laten we de probleemstelling algemener maken. Stel dat $r_1, r_2, \ldots$ een periodieke rij is van gehele getallen. Hierbij betekent periodiek dat de rij zich na een eindig aantal termen gaat herhalen. Om het concreet te maken, laten we hier als voorbeeld het rijtje $1, 0, -17, 1, 0, -17, 1, 0, -17, \ldots$ nemen, waarbij de periode 3 is. Dit rijtje zal het rijtje van tellers worden, die in het oorspronkelijke vraagstuk allemaal gelijk waren aan 1. We kiezen opnieuw een startpunt a, bijvoorbeeld $a = 4$, en kijken dan naar sommen als $\frac{1}{4} + \frac{0}{5} + \frac{-17}{6} + \frac{1}{7} + \frac{0}{8} + \ldots$.

Uiteindelijk heb ik zowel mijn bachelor- als mijn masterscriptie over ditzelfde onderwerp geschreven. Ik kon in mijn masterscriptie het volgende bewijzen: welk periodiek rijtje van tellers je ook kiest (zolang de termen maar niet allemaal 0 zijn) en welke startwaarde a je ook neemt, er zal altijd een moment komen waarop de noemer van de resulterende breuk daalt. In wiskundenotatie: voor elke periodieke rij $r_1, r_2, \ldots$ van gehele getallen en elk positief geheel getal a bestaat er een getal b zodat de noemer van $\frac{r_a}{a} + \frac{r_{a+1}}{a+1} + \ldots + \frac{r_b}{b}$ kleiner is dan de noemer van de som $\frac{r_a}{a} + \frac{r_{a+1}}{a+1} + \ldots + \frac{r_{b-1}}{b-1}$.

Voorlopige ontknoping

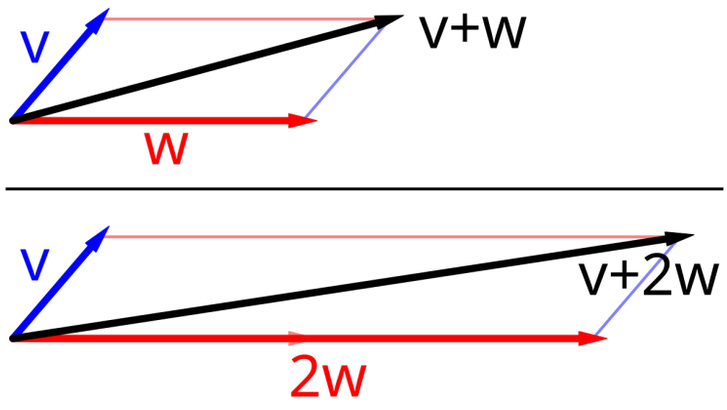
Ik had mezelf als doel gesteld om ook een bovengrens te vinden voor de kleinste b waarbij die noemer kleiner wordt. Om dit uiteindelijke resultaat te geven, definiëren we m als het maximum van de absolute waardes van de tellers en de periode. In het eerdere voorbeeld waar we het rijtje $1, 0, -17, \ldots$ met periode 3 kozen, is dit het maximum van de getallen $1, 0, 17, 3$, wat dus 17 is. In het artikel dat ik eind vorig jaar heb afgemaakt (bijna anderhalf decennium nadat ik voor het eerst over het vraagstuk las in het boek van Erdős en Graham), bewees ik uiteindelijk het volgende: het kleinste getal b waarvoor de noemer van de som daalt, is kleiner dan ca, voor een bepaalde constante c. En de waarde van die constante c? Schrik niet,

$$c = e^{e^{e^{10m}}}.$$

Hoewel dit uiteraard, zelfs voor kleine waardes van m, een gigantisch getal is, is het voor elk gekozen rijtje van tellers 'slechts' een constante factor. Hoe dan ook, het ligt nu natuurlijk voor de hand om te onderzoeken of dit te verbeteren valt; kunnen we de bovengrens verlagen en iets preciezer aangeven wanneer de noemer voor het eerst kleiner wordt? Aangezien ik hier zelf inmiddels lang genoeg over heb nagedacht, laat ik dit vraagstuk met alle liefde over aan wie maar de moed en de inspiratie heeft. En zo zie je maar dat elk antwoord weer nieuwe vragen oproept. De nalatenschap van Erdős zal de wiskundewereld vermoedelijk nog vele tientallen jaren bezighouden.

Vectorruimten

Els Vanlommel
Alexander Holvoet
Pedro Tytgat



INHOUD

1 **Van concreet naar abstract** 26
2 **Van de axioma's** 34
3 **Vanuit zelfstandig onderzoeken** . . 39
4 **Gekende problemen** 47

Inleiding en opzet

In de specifieke minimumdoelen vinden we in de derde graad gevorderde wiskunde (voor richtingen met component wiskunde) een nieuw doel rond abstracte structuren: "De leerlingen analyseren verzamelingen voorzien van één of meerdere bewerkingen aan de hand van een algebraïsche structuur." Dit doel is breed en kan op verschillende manieren en met verschillende structuren ingevuld worden. In de memorie bij het doel staan als voorbeelden van een algebraïsche structuur: groep, ring, veld en vectorruimte. Over groepentheorie schreven we al een loep in UW 38/4 (Vanlommel en Roelens, 2024). Nu is het de beurt aan vectorruimten. Het is aan jou als leraar om, rekening houdend met de doelgroep, te beslissen welke algebraïsche structuur wordt behandeld. Waarom zou je voor vectorruimten kiezen? Bij vectorruimten worden op relatief korte tijd heel wat fundamentele wiskundige begrippen aangeleerd, zoals lineaire combinatie, opspanning, deelruimte, lineaire (on)afhankelijkheid, basis en dimensie. Deze begrippen komen uitgebreid aan bod in zowat alle wetenschappelijke opleidingen in het hoger onderwijs. Vaak zijn dat de opleidingen waar leerlingen uit richtingen met component wiskunde in het secundair later terechtkomen. Het is dus goed als zij al met vectorruimten kennismaken in het secundair onderwijs. Daarnaast biedt de studie van vectorruimten mooie verbanden met andere leerstofonderdelen die aan bod komen in de gevorderde wiskunde, zoals ruimtemeetkunde (rechten en vlakken door de oorsprong), lineaire stelsels, matrices en determinanten. Dat betekent niet per se dat al deze leerstof moet behandeld zijn vooraleer je met het onderdeel vectorruimten start. Voorkennis van ruimtemeetkunde is mooi meegenomen, maar geen absolute noodzaak. Naast verbanden binnen wiskunde zijn er ook linken met vectoren in fysica.

In de meeste lessen op school en in de meeste handboeken wordt de leerstof van vectorruimten axiomatisch aangebracht. Deze aanpak wordt uitgebreid besproken in paragraaf 2 van deze loep. Daar frissen we ook de belangrijkste concepten van vectorruimten op. Omdat sommige doelgroepen mogelijk baat hebben bij een iets minder abstracte aanpak, stellen we naast de axiomatische aanpak nog twee andere mogelijke instappen voor. Paragraaf 1 beschrijft een aanpak waarbij we concepten en eigenschappen bestuderen binnen een concrete vectorruimte om van daaruit de veralgemening voor te bereiden. In paragraaf 3 brengen

we nieuwe concepten aan vanuit open problemen. Leerlingen gaan hierbij voornamelijk zelfstandig op onderzoek. We werkten enkele voorbeelden van zulke open problemen volledig uit en tonen de grote lijnen van dat lesmateriaal in paragraaf 3. Dit lesmateriaal wordt als interactieve website, maar ook als af te drukken document online beschikbaar gesteld. Ook al bieden we verschillende lesmaterialen aan, toch vormt de loep absoluut geen afgewerkte cursus vectorruimten.

In paragraaf 4 bespreken we enkele veel voorkomende misconcepties bij vectorruimten en plaatsen we die in de bredere vakdidactische theorie van de “drie werelden”.

Tot slot merken we nog op dat we ons in deze loep beperken, op enkele occasionele voorbeelden na, tot eindigdimensionale vectorruimten over het veld $\mathbb{R}$.

1 Van concreet naar abstract

In paragraaf 2 zal mijn collega-auteur een sterk axiomatische aanpak van de lessen rond vectorruimten voorstellen. Vooral in de 6-uursrichtingen van mijn school merkten we dat sommige leerlingen afhaakten op het abstract formele karakter van de leerstof rond vectorruimten. Om het meer plastisch te zeggen: ‘Dat viel daar op een koude steen’. Deze leerlingen memoriseerden de theorie en voerden het algebraïsche rekenwerk uit zonder dat ze goed wisten waarmee ze bezig waren en zonder dat ze de geziene concepten diepgaand begrepen. Ze geraakten daardoor gedemotiveerd en eindigden met een afkeer voor abstracte wiskunde. Dat kan natuurlijk niet de bedoeling zijn.

Hierbij komt dat je binnen het verplichte programma voor gevorderde wiskunde, zeker wanneer je dat in 6 uur moet afwerken i.p.v. 7 of 8 uur, niet altijd de tijd hebt om de nieuwe concepten grondig te laten insijpelen of doorgedreven onderzoekend te werken.

Hoe kun je deze doelgroep in de beperkte tijd die er is toch bereiken met een abstract verhaal zonder dat zij onderweg afhaken?

Concreet en toch abstract

We stellen een aanpak voor waarbij we vanuit gekende voorbeelden eerst de gemeenschappelijke algebraïsche structuur afleiden. We starten het verhaal met voorbeelden van vectorruimten die de leerlingen al kennen. Hoewel de individuele objecten in die verzamelingen en de bewerkingen die ermee uitgevoerd worden totaal anders zijn, hebben deze bewerkingen dezelfde eigenschappen. Wiskundigen zouden geen wiskundigen zijn als ze dan niet een manier zouden zoeken waarmee ze al deze verzamelingen tegelijk kunnen beschrijven. Dit brengt ons bij het algemene concept van een vectorruimte en de abstracte definitie ervan met de gekende axioma’s. Belangrijk: we beperken ons tot vectorruimten over $\mathbb{R}$.

In de wetenschap dat andere concrete vectorruimten dezelfde eigenschappen zullen hebben, ontginnen we dan de vectorruimtestructuur verder aan de hand van één goed gekozen concrete verzameling, namelijk $\mathbb{R},\mathbb{R}^n,+$. Dit stelt ons in staat om bij het introduceren van nieuwe definities of bij het onderzoeken, formuleren en bewijzen van eigenschappen telkens terug te grijpen naar de concrete situatie van geordende n-tallen die we meetkundig kunnen visualiseren voor $n = 2$ en $n = 3$. Zo proberen we de intuïtie voor de nieuwe concepten te versterken. Tegelijk verhindert de beperking tot $\mathbb{R}^n$ niet om het typische algebraïsche rekenwerk te doen dat bij vectorruimten hoort. Doorheen de lessenreeks benadrukken we regelmatig het uiteindelijke opzet: een algemeen abstract raamwerk bouwen dat verder gaat dan de concreet gekozen verzameling en waarbij vectoren alle mogelijke objecten kunnen zijn.

Aan het einde van de lessenreeks illustreren we het nut van die abstrahering door kort de geleerde concepten over te zetten naar andere concrete verzamelingen die niet zo voor de hand liggen. Die concepten zullen uitgebreid opnieuw aan bod komen in vrijwel alle wetenschappelijke opleidingen van het hoger onderwijs, waar nu de stap naar $\mathbb{R},V,+$ vlot kan gezet worden. Het belang van abstractie kan ook getoond worden door concrete toepassingen te bestuderen. Zo kan voor het benaderen van gegevens gebruik gemaakt worden van het algemeen concept van de orthogonale projectie van een vector op een deelruimte van een vectorruimte die uitgerust is met een scalair product. Mooie, maar niet zo gemakkelijke, toepassingen zijn dimensiereductie bij datasets of beeldcompressietechnieken zoals MP3 en JPEG.

Waar vind je lesmateriaal voor deze aanpak?

Steunend op het werk van Koen De Naeghel, ontwikkelden de auteurs van Wiskundeplan een cursustekst (De Naeghel e.a., 2024) die volledig aansluit bij de hierboven beschreven aanpak en die direct in de klas kan gebruikt worden. De theo-

rie is in deze cursus rigoureus opgebouwd en het geheel is abstract, ondanks de beperking tot één concrete verzameling en de visualisering van veel concepten. Zo komt het tegemoet aan het eigenlijke doel van het minimumdoel rond abstracte structuren, namelijk leerlingen laten kennismaken met en motiveren voor de abstractie die zo eigen is aan zuivere wiskunde. De strakke vorm van de cursus is mogelijk ongewoon voor leerlingen, maar vormt een goede voorbereiding op cursussen in het hoger onderwijs. Een bewerkbare versie die je helemaal naar je hand kunt zetten (bv. sommige eigenschappen enkel visueel verantwoorden en de formele bewijzen ervan weglaten), kun je downloaden via https://wiskundeplan.be/lesmateriaal/.

Ook de lessenreeks 'Essence of linear algebra' van 3Blue1Brown (Sanderson, 2016) is een aanrader. Deze cursus bestaat uit 16 youtube-filmpjes die verder gaan dan louter vectorruimten en die heel mooi het breder kader schetsen. De belangrijkste concepten van vectorruimten komen aan bod op een manier die goed aansluit bij de hierboven beschreven aanpak. In de filmpjes wordt immers een intuïtieve 'visual first-approach' gehanteerd waarbij de behandelde concepten gevisualiseerd worden met vectoren in het vlak. Deze cursus is vooral interessant voor leraren die meer achtergrond zoeken en meer intuïtie willen verwerven bij lineaire algebra. Sommige filmpjes en fragmenten kunnen ook in de les gebruikt worden. Het Engels dat hier gesproken wordt, is rudimentair en goed verstaanbaar voor leerlingen.

Leraren die meer diepgaande achtergrond zoeken, gecombineerd met concrete toepassingen en visualisatie van de concepten, vinden zeker hun gading in het uitstekende boek 'Linear Algebra and Its Applications' van David C. Lay (Lay, 2016). Je kunt dat boek niet gebruiken als handboek voor de leerlingen, maar je vindt er wel inspiratie en goede oefeningen voor in de klas.

Lesmateriaal voor de mooie toepassing die we hierboven al noemden, vind je in het voorbereidend materiaal voor het Internationaal Wiskundetoernooi 2025, 'Orthogonaliteit en benadering: van loodlijn tot JPEG'. De theorie van vectorruimten is in die bundel niet gedetailleerd uitgewerkt en de focus ligt vooral op toepassingen die alle te maken hebben met het benaderen en comprimeren van gegevens. Voor een groep leerlingen die vooral geïnteresseerd is in het gebruiken van wiskunde is dit heel boeiende materie en uitstekend lesmateriaal.

In de volgende paragrafen werken we enkele onderdelen uit die in de vorige paragrafen onderbelicht zijn gebleven, zoals het inspelen op voorkennis.

Voorkennis

Om ervoor te zorgen dat leerlingen de nieuwe concepten sneller en gemakkelijker internaliseren, kun je deze in de eerste en tweede graad op een aantal plaatsen al voorbereiden.

In de getallenleer van de eerste graad en het derde jaar komen de eigenschappen van de som en het product van getallen aan bod. Leerlingen kennen begrippen als inwendigheid, commutativiteit, associativiteit, distributiviteit, neutraal en invers element. Het kennen van die benamingen is niet alleen handig om er snel naar te verwijzen bij berekeningen. Door de eigenschappen van de bewerkingen nauwkeurig en formeel (met letters en kwantoren) te beschrijven en te benoemen, bereid je de leerlingen stap voor stap voor op abstracte wiskunde, ook al lijkt dat op dat moment misschien overbodige abstractie.

In de tweede graad worden de som en het scalair veelvoud van vectoren in het vlak behandeld. In richtingen die voorbereiden op gevorderde wiskunde worden die bewerkingen vertaald naar de coördinaten van vectoren. Je kunt met de vakgroep afspreken dat je dan al kort focust op de eigenschappen van de som en het veelvoud van vectoren en van geordende tweetallen. Je kunt hier bovendien een eerste keer de begrippen lineaire combinatie en basis laten vallen. Ervaren leraren weten dat het helpt om begrippen spiraalsgewijs aan bod te laten komen, zelfs als dat in eerste instantie een oppervlakkige kennismaking is.

In de derde graad gevorderde wiskunde staan complexe getallen en matrices op het programma. De eigenschappen van de gebruikelijke bewerkingen kunnen ook hier formeel beschreven en benoemd worden. Je kunt het begrip commutatieve groep in deze context introduceren en de eigenschappen van de som en het reëel veelvoud van matrices zijn heel geschikt voor een eerste vermelding van het begrip vectorruimte. Je kunt dan al enkele voorbeelden van vectorruimten naast elkaar plaatsen om zo de gemeenschappelijkheid van eigenschappen te illustreren én (niet onbelangrijk!) ook tegenvoorbeelden geven.

Naast matrices zijn lineaire stelsels en determinanten vereiste voorkennis voor een lessenreeks die de vectorruimte $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, +$ centraal stelt. Hoewel je de nieuwe concepten meetkundig kunt visualiseren in

het vlak en in de ruimte voor $n = 2$ en $n = 3$, is het niet absoluut nodig om ruimtemeetkunde vooraf al behandeld te hebben. De intuïtieve voorkennis van leerlingen volstaat.

Vertrekken van concrete voorbeelden

Zoals al vermeld, starten we de lessenreeks in eerste instantie met veel voorbeelden en tegenvoorbeelden van concrete verzamelingen voorzien van een optelling en een scalaire vermenigvuldiging. Leerlingen moeten goed beseffen dat het begrip vector bij vectorruimten verder gaat dan de klassieke vectoren (met de pijlenvoorstelling) die ze tot dan toe zijn tegengekomen. Bovendien moeten ze inzien dat de som en de scalaire vermenigvuldiging waarvan sprake ook niet de typische gekende vorm moeten aannemen. Om dat te bereiken, moet je zeker de tijd nemen om voldoende voorbeelden te behandelen en ook de meer exotische. Verderop bespreken we enkele voorbeelden. Het is belangrijk dat je bij elk voorbeeld kort telkens de axioma's van een vectorruimte overloopt zodat leerlingen de overeenkomsten tussen de verschillende verzamelingen zien. Verderop in deze loep, in de paragraaf over de axiomatische aanpak, worden de axioma's van een vectorruimte opgesomd. Merk op dat het woord 'axioma' in de context van vectorruimten wat vreemd kan overkomen. In een intuïtieve aanpak van de meetkunde zijn axioma's basiseigenschappen waarvan we de waarheid zonder bewijs aannemen. Bij vectorruimten (en ook bij een meer formele aanpak van de meetkunde) krijgen de axioma's het karakter van definiërende basiseigenschappen: ze geven aan waaraan een wiskundige structuur moet voldoen om een vectorruimte te worden genoemd. In beide gevallen gaat het om basiseigenschappen waaruit dan alle andere eigenschappen logisch worden afgeleid. Je vindt veel voorbeelden en tegenvoorbeelden van vectorruimten in de klassieke handboeken en het hierboven gesuggereerde materiaal. We sommen er enkele op.

De verzameling $\mathbb{R}^2$ van reële koppels, de verzameling vectoren $\mathscr{V}$ in het vlak, de verzameling $\mathbb{R}^{m\times n}$ van $m \times n$-matrices en de verzameling $\mathbb{C}$ van complexe getallen zijn al gekende vectorruimten.

Minder voor de hand liggende voorbeelden:

- de verzameling $\mathbb{R}[x]$ van reële veeltermen in x, voorzien van de gekende optelling en scalaire vermenigvuldiging van veeltermen,
- de verzameling van alle reële functies $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)\}$, voorzien van de puntsgewijze optelling en de puntsgewijze scalaire vermenigvuldiging van functies,
- de verzameling van alle 3×3-diagonaalmatrices voorzien van de optelling en scalaire vermenigvuldiging van matrices,
- de verzameling $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ van alle reële rijen voorzien van de termsgewijze optelling en scalaire vermenigvuldiging van rijen,
- voor een gegeven waarde van $k \in \mathbb{R}$, de vectorruimte van alle functies f die oplossingen zijn van de differentiaalvergelijking $f' = kf$ uitgerust met de puntsgewijze optelling en de puntsgewijze scalaire vermenigvuldiging,
- de verzameling van geordende drietallen die oplossingen zijn van het homogeen stelsel

$$\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 4x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

voorzien van de gekende optelling en scalaire vermenigvuldiging van geordende drietallen.

Exotische voorbeelden die misschien wat vergezocht lijken, maar die dwingen tot abstrahering:

- de verzameling $V = \{(a,b,c) | a,b,c \in \mathbb{R}\}$ met som $(a_1,b_1,c_1) + (a_2,b_2,c_2) = (a_1 + a_2 - 2, b_1 + b_2, c_1 + c_2 + 2)$ en scalaire vermenigvuldiging $r \cdot (a,b,c) = (ra + 2 - 2r, rb, rc - 2 + 2r)$,
- de verzameling $V = \{(a,b) | a,b \in \mathbb{R}_0^+\}$ voorzien van de optelling $(a,b) + (c,d) = (ac,bd)$ en scalaire vermenigvuldiging $r \cdot (a,b) = (a^r, b^r)$ met $r \in \mathbb{R}$.

Bij deze exotische voorbeelden is het een goede oefening om te beargumenteren waarom ze vectorruimten zijn en om het neutraal element en het symmetrisch element te zoeken.

Bij tegenvoorbeelden is het belangrijk om na te gaan waarom het geen vectorruimten zijn. Dat kan vaak aan de hand van verschillende axioma's. We illustreren dit hier.

- De verzameling $\mathbb{Z}^2$ van koppels gehele getallen, uitgerust met de gekende optelling en scalaire vermenigvuldiging van koppels is geen vectorruimte. Deze verzameling is niet gesloten onder de scalaire vermenigvuldiging. Het veelvoud $\frac{1}{3}(5,-7)$ bijvoorbeeld, behoort niet tot $\mathbb{Z}^2$.
- De eenheidscirkel in $\mathbb{R}^2$: $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, uitgerust met de gekende optelling en scalaire vermenigvuldiging van koppels

is geen vectorruimte. De som van twee punten op de eenheidscirkel ligt immers niet op die cirkel. Ook bijvoorbeeld bevat de eenheidscirkel geen neutraal element voor de optelling omdat de nulvector (0,0) niet op de cirkel ligt.

- Ook de verzameling oplossingen van een niethomogeen stelsel $AX = B$ (met $B \neq 0$) van lineaire vergelijkingen is geen vectorruimte. Ze mist immers een neutraal element. Ook is ze niet gesloten onder de optelling: als X_1 en X_2 oplossingen zijn, dan is $X_1 + X_2$ geen oplossing want $A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = B + B = 2B \neq B$.

Na de voorbeelden, tegenvoorbeelden en linken met al geziene leerstof gaan we dieper in op de eigenschappen van vectorruimten.

De vectorruimte $\mathbb{R},\mathbb{R}^n,+$

We hebben hierboven aangehaald dat het volstaat om de eigenschappen in het grootste deel van de lessenreeks te onderzoeken voor één concrete verzameling. We verduidelijken dit idee met een voorbeeld.

Met elke 2×2-matrix kunnen we op een natuurlijke manier juist één geordend viertal associëren:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \quad \text{komt overeen met} \quad (x_1,x_2,x_3,x_4).$$

Dat verband is omkeerbaar: bij elk geordend viertal hoort één 2×2-matrix. Het is dus een bijectie tussen de verzamelingen $\mathbb{R}^{2\times2}$ en $\mathbb{R}^4$.

Deze bijectie bewaart de optelling en scalaire vermenigvuldiging. Zo is bijvoorbeeld

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$$

en

$$(1,3,8,2) + (6,0,1,5) = (7,3,9,7).$$

We zeggen: de vectorruimten $\mathbb{R}^{2\times2}$ en $\mathbb{R}^4$ zijn isomorf en we noteren $\mathbb{R}^{2\times2} \cong \mathbb{R}^4$. Dit betekent dus dat er een bijectie bestaat tussen deze verzamelingen die de optelling en de scalaire vermenigvuldiging bewaart.

We hernemen het (mooie!) voorbeeld van de vectorruimte $V = \{(a,b) | a,b \in \mathbb{R}_0^+\}$ voorzien van de optelling $(a,b) + (c,d) = (ac,bd)$ en scalaire vermenigvuldiging $r \cdot (a,b) = (a^r,b^r)$ met $r \in \mathbb{R}$. Dit is een vectorruimte die isomorf is met $\mathbb{R}^2$ via de logaritmische afbeelding:

$$\phi : V \to \mathbb{R}^2, \quad \phi(a,b) = (\ln a, \ln b).$$

Deze bijectie bewaart de optelling en de scalaire vermenigvuldiging. Zo bijvoorbeeld is

$$\begin{aligned} \phi\big((a,b)+(c,d)\big) &= \phi\big((ac,bd)\big) \\ &= \big(\ln(ac),\ln(bd)\big) \\ &= \big(\ln a + \ln c, \ln b + \ln d\big) \\ &= \big(\ln a, \ln b\big) + \big(\ln c, \ln d\big) \\ &= \phi\big((a,b)\big) + \phi\big((c,d)\big). \end{aligned}$$

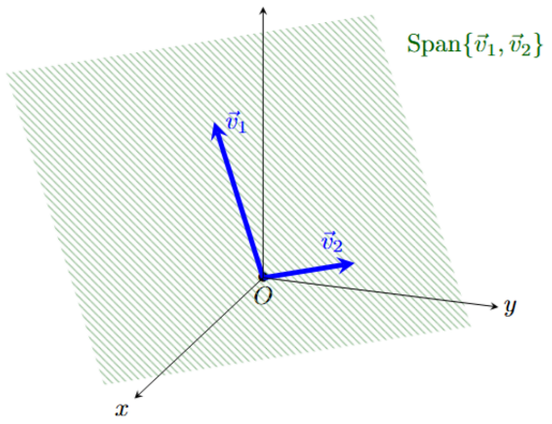
Merk op dat je hier sommen in V en sommen in $\mathbb{R}^2$ met hetzelfde symbool noteert. Het kan dan soms duidelijker zijn om de som in V met een ander symbool te noteren, zoals bijvoorbeeld $\oplus$.

We kunnen bewijzen dat alle reële vectorruimten met dezelfde dimensie isomorf zijn. Intuïtief betekent dit dat vectorruimten met dezelfde dimensie op de betekenis van de objecten en bewerkingen na aan elkaar gelijk zijn, in het bijzonder dat de bewerkingen precies dezelfde eigenschappen hebben. Als we ons beperken tot eindigdimensionale vectorruimten, dan volstaat het om de vectorruimtestructuur verder te onderzoeken voor één concrete verzameling. Automatisch gelden de bevindingen dan voor alle vectorruimten met dezelfde dimensie. Er gaat geen inzicht verloren in de nieuwe concepten door in één specifieke vectorruimte te werken.

Een voor de hand liggende keuze is de vectorruimte van de geordende n-tallen $\mathbb{R},\mathbb{R}^n,+$. Met deze keuze kun je immers van elk belangrijk concept een meetkundige interpretatie geven in het vlak of in de ruimte. Zo kunnen we bijvoorbeeld de opspanning, $\text{Span}\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$, van de vectoren $\vec{v}_1 = (2,0,3)$ en $\vec{v}_2 = (-1,1,0)$ visualiseren met een vlak door de oorsprong dat de twee ruimtelijke vectoren met coördinaten $(2,0,3)$ en $(-1,1,0)$ bevat. Dat vlak wordt als het ware zoals een (oneindig) vlies opgespannen door deze twee vectoren.

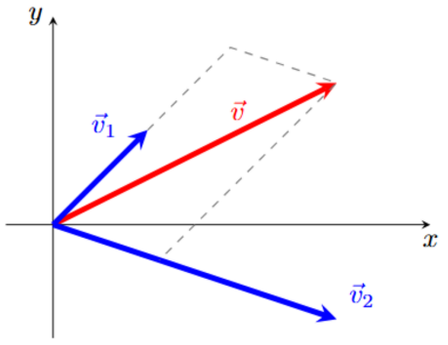
Het concept van een opspanning van vectoren krijgt door deze voorstelling een concrete betekenis. Dit helpt om meer intuïtie op te bouwen voor het begrip. Nadeel van deze aanpak is dat het risico bestaat dat leerlingen gaan denken dat vectoren in een vectorruimte altijd de typische gekende vectoren van de pijlenvoorstelling zijn. Het is dus belangrijk om doorheen de lessenreeks regelmatig te verwijzen naar de voorbeelden van bij het begin om duidelijk te maken dat vectoren in de

algemene context van vectorruimten ook compleet andere objecten kunnen zijn.



Figuur 1 *– Visualisatie van de opspanning van twee vectoren. Bron: https://wiskundeplan.be/lesmateriaal/*

Ook het begrip basis van een vectorruimte kan gevisualiseerd worden. In figuur 2 is de vector $\vec{v}$ geschreven als lineaire combinatie van de basisvectoren $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$. Deze zijn de meetkundige voorstelling van de vectoren $\vec{v}_1 = (1,1)$ en $\vec{v}_2 = (3,-1)$ van $\mathbb{R}^2$. Merk op dat voor $n > 3$ een visualisatie niet voor de hand ligt. Dat maakt dat je voor $n > 3$ niet zomaar kunt terugvallen op intuïtie gebaseerd op de meetkundige voorstelling van de concepten. Het dwingt om die concepten ook abstract te bekijken en met algemene n-tupels te redeneren.



Figuur 2 *– Visualisatie van een basis van het vlak. Bron: https://wiskundeplan.be/lesmateriaal/*

Terug naar andere vectorruimten

Aan het einde van de lessenreeks, nadat we de fundamentele concepten en eigenschappen van de vectorruimte $\mathbb{R},\mathbb{R}^n,+$ hebben bestudeerd, illustreren we kort nog het nut van abstractie door de geleerde concepten te vertalen naar andere concrete verzamelingen. We geven hier twee voorbeelden.

In een eerste voorbeeld bekijken we de verzameling $\mathbb{P}_n$ van alle veeltermen met reële coëfficiënten en met graad hoogstens n. In de volgende lesactiviteit gaan we na of een gegeven verzameling veeltermen een basis vormt voor $\mathbb{P}_n$. We gebruiken daarvoor de algebraïsche technieken die we leerden bij $\mathbb{R}^n$.

LESACTIVITEIT

De verzameling van alle veeltermen van graad hoogstens n

Stel $\mathbb{P}_n$ de verzameling van alle veeltermen van graad hoogstens n. Dit zijn alle veeltermen van de vorm $\vec{v}(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Elke vector van $\mathbb{P}_n$ is dus per definitie een lineaire combinatie van de vectoren $\vec{v}_0 = 1$, $\vec{v}_1 = x$, $\vec{v}_2 = x^2, \ldots, \vec{v}_n = x^n$. Bijgevolg is de verzameling $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ een basis voor $\mathbb{P}_n$ en de dimensie van $\mathbb{P}_n$ is $n+1$.

Ga na, met dezelfde algebraïsche technieken als bij $\mathbb{R}^n$, of $\{3+7x, 5+x-2x^3, x-2x^2, 1+16x-6x^2+x^3\}$ een basis vormt voor $\mathbb{P}_3$.

Oplossing:
We noteren de vier gegeven vectoren als:

$$\vec{v}_1 = 3 + 7x$$
$$\vec{v}_2 = 5 + x - 2x^3$$
$$\vec{v}_3 = x - 2x^2$$
$$\vec{v}_4 = 1 + 16x - 6x^2 + x^3$$

Om te controleren of deze vectoren een basis vormen voor $\mathbb{P}_3$, moeten we nagaan of ze lineair onafhankelijk zijn. Aangezien $\dim(\mathbb{P}_3) = 4$ en we vier vectoren hebben, is lineaire onafhankelijkheid voldoende om te concluderen dat ze een basis vormen. We schrijven elke veelterm als een coördinatenvector ten opzichte van de standaardbasis $\{1, x, x^2, x^3\}$:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= 3 + 7x + 0x^2 + 0x^3 \quad &\longrightarrow \quad [3, 7, 0, 0]^T \\
\vec{v}_2 &= 5 + 1x + 0x^2 - 2x^3 \quad &\longrightarrow \quad [5, 1, 0, -2]^T \\
\vec{v}_3 &= 0 + 1x - 2x^2 + 0x^3 \quad &\longrightarrow \quad [0, 1, -2, 0]^T \\
\vec{v}_4 &= 1 + 16x - 6x^2 + 1x^3 \quad &\longrightarrow \quad [1, 16, -6, 1]^T
\end{aligned}$$

Deze vier vectoren zijn lineair onafhankelijk als en slechts als de volgende matrix een niet-nul determinant heeft:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 1 & 16 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Je kunt narekenen dat $\det(A) = -64 \neq 0$ en dus zijn de vier vectoren lineair onafhankelijk. Bijgevolg vormt de verzameling

$$\{3 + 7x, 5 + x - 2x^3, x - 2x^2, 1 + 16x - 6x^2 + x^3\}$$

inderdaad een basis voor $\mathbb{P}_3$.

Bekijken we als tweede voorbeeld de verzameling van alle rijen van Fibonacci voorzien van de elementsgewijze optelling en scalaire vermenigvuldiging van rijen. Je kunt nagaan dat deze verzameling een vectorruimte vormt. De vectoren van deze vectorruimte zijn Fibonaccirijen. Deze hebben alle als recursief voorschrift: $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ met $n \geq 1$. Het zijn dus allemaal oplossingen van een homogene recursievergelijking (of differentievergelijking) van de tweede orde. Je kunt de dimensie van deze vectorruimte vinden door een basis te zoeken. Dat doen we in de volgende lesactiviteit.

LESACTIVITEIT

De verzameling van rijen van Fibonacci

Je kent de beroemde rij van Fibonacci: $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$

1 Geef het recursief voorschrift van deze rij.

✓ $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ *met* $u_1 = 0$ *en* $u_2 = 1$.

Door de begintermen te veranderen, vinden we oneindig veel andere rijen die aan hetzelfde recursief voorschrift voldoen. Enkele voorbeelden:

- De rij $(1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots)$ met begintermen $u_1 = 1$, $u_2 = 0$
- De rij $(2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$ met begintermen $u_1 = 2$, $u_2 = 3$
- De rij $(5, 5, 10, 15, 25, 40, \ldots)$ met begintermen $u_1 = 5$, $u_2 = 5$
- De rij $(-4, 2, -2, 0, -2, -2, -4, -6, \ldots)$ met begintermen $u_1 = -4$, $u_2 = 2$

We noemen dit allemaal rijen van Fibonacci.

We onderzoeken nu of de verzameling van alle Fibonaccirijen een vectorruimte vormt. Dan hebben we een som en een scalaire vermenigvuldiging van rijen nodig.

Stel $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \ldots)$ en $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3, \ldots)$ twee rijen van Fibonacci en c een reëel getal. We definiëren:

- $\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3, \ldots)$
- $c \cdot \vec{v} = (cv_1, cv_2, cv_3, \ldots)$

2 Stel $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \ldots)$ en $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3, \ldots)$ twee rijen van Fibonacci. Is de som $\vec{v} + \vec{w} = \vec{u}$ opnieuw een Fibonaccirij? Bewijs je antwoord.

✔ *Ja. De som is opnieuw een rij van Fibonacci. Om dit te bewijzen, moeten we aantonen dat* $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ *voor alle* $n \geq 1$.
Omdat $u_n = v_n + w_n$ *voor alle n, hebben we voor* $n \geq 1$*:*

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= v_{n+1} + w_{n+1} \\ &= (v_n + v_{n-1}) + (w_n + w_{n-1}) \quad \textit{(want } \vec{v} \textit{ en } \vec{w} \textit{ zijn Fibonaccirijen)} \\ &= (v_n + w_n) + (v_{n-1} + w_{n-1}) \quad \textit{(commutativiteit en associativiteit van de optelling in } \mathbb{R}) \\ &= u_n + u_{n-1}. \end{aligned}$$

3 Stel $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \ldots)$ een Fibonaccirij en $c \in \mathbb{R}$. Stel $\vec{u} = c \cdot \vec{v}$. Toon aan dat $\vec{u}$ ook een Fibonaccirij is.

✔ *We moeten aantonen dat* $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ *voor alle* $n \geq 1$.
Omdat $u_n = cv_n$ *voor alle n en* $\vec{v}$ *een Fibonaccirij is, geldt:*

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= cv_{n+1} \\ &= c(v_n + v_{n-1}) \quad \textit{(want } \vec{v} \textit{ is een Fibonaccirij)} \\ &= cv_n + cv_{n-1} \quad \textit{(distributiviteit van de vermenigvuldiging t.o.v. de optelling in } \mathbb{R}) \\ &= u_n + u_{n-1}. \end{aligned}$$

4 Stel F de verzameling van alle Fibonaccirijen. We hebben net aangetoond dat de optelling en de scalaire vermenigvuldiging inwendig is in F. Je kunt aan de hand van de andere axioma's nagaan dat F een vectorruimte is. Wat is het neutraal element voor de optelling in F? Behoort het tot F? Wat is het symmetrisch element van een vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \ldots)$ in F? Behoort dat tot F?

✔ *Het neutraal element is de nulrij* $\vec{0}_F = (0, 0, 0 \ldots)$ *Elke term (vanaf de tweede) in deze rij is de som van de twee vorige termen. Het is dus een rij van Fibonacci of nog* $\vec{0}_F \in F$. *Het symmetrisch element van* $\vec{v}$ *is* $-\vec{v} = (-v_1, -v_2, -v_3, \ldots)$. *Dit is opnieuw een rij van Fibonacci want* $\vec{v} \in F$.

We zoeken nu een basis voor F.

5 Stel $\vec{v}$ een Fibonaccirij met begintermen (x_1, x_2). Dan is $v_1 = x_1$ en $v_2 = x_2$. Schrijf de volgende 5 termen $v_3, v_4, \ldots, v_7$ als functie van x_1 en x_2

✔ $v_3 = x_1 + x_2$, $v_4 = v_3 + v_2 = x_1 + 2x_2$, $v_5 = v_4 + v_3 = x_1 + 2x_2 + x_1 + x_2 = 2x_1 + 3x_2$
$v_6 = v_5 + v_4 = \ldots = 3x_1 + 5x_2$, $v_7 = v_6 + v_5 = \ldots = 5x_1 + 8x_2$

6 Schrijf nu de rij $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, \ldots)$ als lineaire combinatie van twee andere rijen van Fibonacci.

✔

$$\begin{aligned}\vec{v} &= (x_1, x_2, x_1 + x_2, x_1 + 2x_2, 2x_1 + 3x_2, 3x_1 + 5x_2, 5x_1 + 8x_2, \ldots) \\ &= (1x_1, 0, 1x_1, 1x_1, 2x_1, 3x_1, 5x_1, \ldots) + (0, 1x_2, 1x_2, 2x_2, 3x_2, 5x_2, 8x_2, \ldots) \\ &= x_1(1,0,1,1,2,3,5,\ldots) + x_2(0,1,1,2,3,5,8,\ldots)\end{aligned}$$

Dus: $\vec{v} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2$ met $\vec{v}_2 = (0,1,1,2,3,5,8,\ldots)$, de standaard rij van Fibonacci, en $\vec{v}_1 = (1,0,1,1,2,3,5,\ldots)$, een verschoven rij van Fibonacci, aangevuld met een één links. We hebben nu aangetoond dat elke Fibonaccirij geschreven kan worden als lineaire combinatie van $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$. Deze twee vectoren zijn geen veelvoud van elkaar en zijn dus lineair onafhankelijk. De verzameling $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ vormt dus een basis voor de verzameling F van alle rijen van Fibonacci.

7 Wat is de dimensie van de vectorruimte van alle rijen van Fibonacci? Is dat logisch?

✔ *De dimensie van F is het aantal basisvectoren en dat is 2. Dat is logisch aangezien de recursievergelijking voor de rij van Fibonacci van de tweede orde is en de 2 begintermen dus alles vastleggen. Er zijn twee vrijheidsgraden.*



Vertel een verhaal en toon samenhang

Tijdens de lessen merkte ik dat het belangrijk is om de samenhang tussen de verschillende nieuwe concepten te expliciteren en de grote lijnen van het verhaal te blijven herhalen. Dit helpt leerlingen om het overzicht te bewaren. Er komt immers veel algebraïsch rekenwerk (met matrices, stelsels en eventueel ook determinanten) bij kijken en dat maakt dat leerlingen snel verdwalen in routines allerhande. Kort samengevat kan een logische opbouw, de verhaallijn als het ware, er als volgt uitzien.

1. We starten met concrete voorbeelden en de definitie van de vectorruimtestructuur. Daarna beperken we ons tot de vectorruimte $\mathbb{R},\mathbb{R}^n,+$.
2. In de wiskunde worden structuren vaak bestudeerd via hun deelstructuren. Wij doen dat voor $\mathbb{R},\mathbb{R}^n,+$ en zoeken deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ die ook de vectorruimtestructuur bezitten. Daarbij worden de begrippen deelruimte en opspanning van vectoren gedefinieerd. We leren dat de opspanning van vectoren een deelruimte is.
3. Omgekeerd kunnen we ons bij een gegeven deelruimte afvragen welke vectoren die deelruimte opspannen of voortbrengen en hoe we zulke voortbrengende vectoren kunnen vinden. Vervolgens willen we weten of we de deelruimte op de meest efficiënte manier opspannen. Wanneer kunnen we sommige van de voortbrengende vectoren weglaten omdat ze overbodig zijn? Deze vraag leidt naar het begrip lineair onafhankelijke vectoren.
4. Tot slot brengen we de begrippen voortbrengend en lineair onafhankelijk samen tot het begrip basis. Alle basissen van eenzelfde eindigdimensionale vectorruimte bevatten precies evenveel vectoren. Dat aantal noemen we de dimensie van de vectorruimte.
5. Het geleerde kan nu worden toegepast op alle andere vectorruimten omdat we weten dat eindigdimensionale reële vectorruimten met dezelfde dimensie isomorf zijn.

2 Van de axioma's

In de voorgaande paragraaf stelde mijn collega-auteur een aanpak voor die zeer geschikt is voor leerlingen in een 6u-cursus. Zelf gaf ik in mijn 8u-klas jarenlang een meer abstracte en rigoureuze benadering. Die biedt een andere kijk op dit onderwerp dan de aanpak binnen een concrete vectorruimte. Het neemt wat meer tijd in beslag, wat in een klas met meer dan 6 lestijden per week best haalbaar is.

Ik geef in grote lijnen enkele aspecten ervan en vermeld wat ik er als potentieel voordeel in zie. (Ik spreek overal in de verleden tijd, aangezien ik na een verhuis naar de andere kant van het land voorlopig niet langer in een 8u-richting lesgeef.)

Een voorbereiding op academische wiskunde

Bij een abstracte aanpak worden reële vectorruimten gedefinieerd vanuit een aantal axioma's, waarbij de verzameling V en de bewerkingen niet gespecificeerd zijn. Alle verdere definities, eigenschappen of stellingen worden op dit abstracte niveau aangebracht.

Definitie • Reële vectorruimte

Een niet-lege verzameling V, voorzien van de inwendige bewerkingen optelling $+$ en scalaire vermenigvuldiging $\cdot$, noemen we een reële vectorruimte $\mathbb{R},V,+$ wanneer ze aan de volgende acht axioma's voldoet:

(1) $\forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V : (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

(2) $\exists \vec{0}_V \in V : \forall \vec{u} \in V : \vec{u}+\vec{0}_V = \vec{u} = \vec{0}_V + \vec{u}$

(3) $\forall \vec{u} \in V : \exists \vec{u'} \in V : \vec{u}+\vec{u'} = \vec{0}_V = \vec{u'}+\vec{u}$

(4) $\forall \vec{u},\vec{v} \in V : \vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$

(5) $\forall r \in \mathbb{R} : \forall \vec{u},\vec{v} \in V : r \cdot (\vec{u}+\vec{v}) = r \cdot \vec{u} + r \cdot \vec{v}$

(6) $\forall r,s \in \mathbb{R} : \forall \vec{u} \in V : (r+s) \cdot \vec{u} = r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{u}$

(7) $\forall r,s \in \mathbb{R} : \forall \vec{u} \in V : r \cdot (s \cdot \vec{u}) = (r \cdot s) \cdot \vec{u}$

(8) $\forall \vec{u} \in V : 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Een voordeel van een dergelijke abstracte aanpak is dat zij leerlingen voorbereidt op wiskundecursussen aan de universiteit, waar het deductief werken vanuit abstracte axioma's of definities vaak de norm is. (Of die aanpak in alle opleidingen even wenselijk is, laten we hier even in het midden.) Door reële vectorruimten op zo'n abstracte manier te definiëren, bereiden we hen niet alleen inhoudelijk voor, maar introduceren we ook een manier van denken en redeneren die essentieel is voor academische wiskundevakken.

Onderscheid tussen eigenschappen van alle vectorruimten en van een concrete vectorruimte

De axioma's worden geïllustreerd met verschillende concrete voorbeelden van vectorruimten, die leerlingen in andere leerstofonderdelen al ontmoetten: matrices, n-tallen, veeltermen en uiteraard de meetkundige vectoren, in het vlak of in de ruimte.
Dan worden enkele basiseigenschappen aangetoond. Twee klassiekers zijn de uniciteit van het neutraal en invers element voor de optelling. In een concrete vectorruimte voelen deze echter niet aan als een eigenschap: bij matrices bijvoorbeeld is elke leerling ervan overtuigd dat enkel de nulmatrix neutraal element kan zijn voor de optelling en dat voor die bewerking enkel de matrix met tegengestelde elementen van een oorspronkelijke matrix het invers element van die matrix kan zijn.
Waarom de uniciteit bewijzen?
En zo komen we bij een tweede voordeel van een abstracte aanpak. Die maakt het mogelijk om scherp het onderscheid te maken tussen eigenschappen die typisch zijn voor elke vectorruimte en eigenschappen die inherent zijn aan een concrete vectorruimte.

Bewijs • Uniciteitseigenschappen

- Zij $\mathbb{R},V,+$ een vectorruimte en $\vec{0}_V$ en $\vec{0}'_V$ beide neutraal element. Omdat $\vec{0}'_V$ neutraal element is, geldt wegens (2) dat $\vec{0}_V = \vec{0}_V + \vec{0}'_V$. En omdat $\vec{0}_V$ neutraal element is, geldt wegens (2) dat $\vec{0}_V + \vec{0}'_V = \vec{0}'_V$. Hieruit volgt dat $\vec{0}_V = \vec{0}'_V$. Het neutraal element is uniek.
- Zij $\mathbb{R},V,+$ een vectorruimte en $\vec{v} \in V$ willekeurig. Veronderstel dat $\vec{v}$ twee inverse elementen $\vec{v}',\vec{v}'' \in V$ heeft. Dit betekent: $\vec{v}+\vec{v}' = \vec{0}_V = \vec{v}'+\vec{v}$ (a) en $\vec{v}+\vec{v}'' = \vec{0}_V = \vec{v}''+\vec{v}$ (b). Dan geldt:

$$\begin{aligned}
\vec{v}' &= \vec{v}' + \vec{0}_V && \text{(axioma (2))}\\
&= \vec{v}' + (\vec{v}+\vec{v}'') && \text{(gelijkheid (b))}\\
&= (\vec{v}'+\vec{v}) + \vec{v}'' && \text{(axioma (1))}\\
&= \vec{0}_V + \vec{v}'' && \text{(gelijkheid (a))}\\
&= \vec{v}'' && \text{(axioma (2))}
\end{aligned}$$

  Elk element van V heeft dus precies één invers element voor de optelling.

De uniciteit van het neutraal en invers element volgt uit de axioma's (1), (2) en (3) van vectorruimten en is dus niet specifiek voor $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Dat deze eigenschappen algemeen geldig zijn, ontslaat ons van de plicht ze in de toekomst telkens opnieuw te bewijzen in nieuwe concrete vectorruimten. Ook daarin schuilt de kracht van een algemene, abstracte aanpak.

Merk op dat het ten gevolge van de uniciteit van *het* invers element is dat we de notatie $-\vec{v}$ voor de inverse van $\vec{v}$ ondubbelzinnig kunnen invoeren en dat we een aftrekking kunnen definiëren.

Ziehier een tweede voorbeeld, voor een minder klassieke eigenschap. Voor een matrix A is het vanzelfsprekend dat $0\cdot A = O$, met O de nulmatrix, of $-1\cdot A = -A$. Maar is dit typisch voor $\mathbb{R}^{m\times n}$ of geldt in elke vectorruimte $\mathbb{R},V,+$ dat $0\cdot\vec{v} = \vec{0}_V$, en $-1\cdot\vec{v} = -\vec{v}$? En zo ja, hoe volgt dit dan uit de acht axioma's voor vectorruimten? Ik beweer niet dat dit *boeiende* materie is, maar voor 16- of 17-jarige leerling-wiskundigen zijn dit nieuwe soorten vragen. De bijbehorende bewijsjes kunnen hen een glimp geven van wat wiskundig exact redeneren inhoudt. Het zijn kleine puzzeltjes die ze aan de hand van hoogstens acht verschillende blokjes en enkele nieuwe spitsvondige techniekjes moeten leren leggen. Het is formele problem solving.

Dat er spitsvondigheid nodig is, blijkt uit het onderstaande bewijs.

Eigenschap • Zij $\mathbb{R},V,+$ een vectorruimte en $\vec{v} \in V$. Dan is $0\cdot\vec{v} = \vec{0}_V$.

Bewijs

$$\begin{aligned}
& \vec{v} = 1\cdot\vec{v} && (8)\\
\Rightarrow\quad & \vec{v} = (1+0)\cdot\vec{v}\\
\Rightarrow\quad & \vec{v} = 1\cdot\vec{v} + 0\cdot\vec{v} && (6)\\
\Rightarrow\quad & \vec{v} = \vec{v} + 0\cdot\vec{v} && (8)\\
\Rightarrow\quad & -\vec{v}+\vec{v} = -\vec{v} + (\vec{v} + 0\cdot\vec{v})\\
\Rightarrow\quad & -\vec{v}+\vec{v} = (-\vec{v}+\vec{v}) + 0\cdot\vec{v} && (1)\\
\Rightarrow\quad & \vec{0}_V = \vec{0}_V + 0\cdot\vec{v} && (3)\\
\Rightarrow\quad & \vec{0}_V = 0\cdot\vec{v} && (2)
\end{aligned}$$

Zoals hierboven vermeld, is zo'n bewijs nogal gekunsteld en niet meteen boeiend. En toch... In mijn ingenieursstudies is mij niet geleerd om stil te staan bij de algemene geldigheid van deze en vergelijkbare eigenschappen; wij bleven in concrete verzamelingen opereren, waar ze triviaal

waren. Voor veel leerlingen zijn deze bewijsjes dus mogelijk een unieke gelegenheid om met andere ogen naar bepaalde eigenschappen te leren kijken, om te leren dat je het idee van '0 als opslorpend element' niet zomaar intuïtief naar elke nieuwe situatie mag overhevelen, maar het moet dubbelchecken op basis van de axioma's van die nieuwe omgeving. Je ontdekt niets verrassends, maar leert een nieuwe houding aan te nemen ten aanzien van evidente rekenregels. De wiskunde als kunst van het 'wis en zekere'. Het is een houding die ik als ingenieur zelf heb moeten leren aannemen toen ik wiskundeleerkracht werd en dat zal voor de talrijke niet-wiskundemasters in ons onderwijs vaak niet anders zijn.

Uit de volgende tabel bewees ik meestal nog één of twee eigenschappen. Voor het overige diende ze als geruststelling: deze rekenregels die we kennen uit concrete vectorruimten blijken algemeen geldig.

Eigenschappen • Gegeven is een vectorruimte $\mathbb{R},V,+,$ met $\vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V$ en $r \in \mathbb{R}$. Dan geldt:

1. $\vec{u}+\vec{v}=\vec{w}+\vec{v} \Rightarrow \vec{u}=\vec{w}$ (schrappingswet)
2. $r \cdot \vec{0}_V = \vec{0}_V$
3. $r \cdot \vec{v} = \vec{0}_V \iff r=0$ of $\vec{v}=\vec{0}_V$
4. $(-1)\cdot\vec{v} = -\vec{v}$
5. $(-r)\cdot\vec{v} = -(r\cdot\vec{v}) = r\cdot(-\vec{v})$

Tot slot nog een kleine anekdote die aantoont dat de bewijzen van die kleine eigenschapjes toch verraderlijk kunnen zijn. Ooit had ik het idee om de eigenschap $0\cdot\vec{v}=\vec{0}_V$ als volgt te bewijzen:

Een fout bewijs •

$$\begin{aligned} & \vec{v} = 1\cdot\vec{v} && (8)\\ \Rightarrow\quad & \vec{v} = (1+0)\cdot\vec{v} &&\\ \Rightarrow\quad & \vec{v} = 1\cdot\vec{v}+0\cdot\vec{v} && (6)\\ \Rightarrow\quad & \vec{v} = \vec{v}+0\cdot\vec{v} && (8) \end{aligned}$$

Aangezien het neutraal element uniek is, is $0\cdot\vec{v}=\vec{0}_V$.

Dat was eigenlijk wat te kort door de bocht. Zie je het ook?

Ik had toen een heel getalenteerde leerling in de klas, die meteen nattigheid voelde. Hij vroeg voorzichtig of ik daarmee niet enkel had aangetoond dat $0\cdot\vec{v}$ een soort 'neutraal element voor $\vec{v}$' is, maar niet voor elk element van V: zal ook gelden dat $\vec{w}+0\cdot\vec{v}=\vec{w}$ voor elke $\vec{w}\in V$? Dat is vereist om onder die uniciteitseigenschap te vallen. Het cruciale stukje bewijs dat ik had weggelaten toont net aan dat als je 'neutraal element voor één element' bent, je automatisch het unieke neutraal element voor alle elementen van de vectorruimte bent.

Zwemmen of verzuipen

Na de basiseigenschappen kwam het zware deel van de leerstof. Er werden verschillende nieuwe definities aangebracht, elk gevolgd door bijbehorende eigenschappen en stellingen, die telkens bewezen werden.

Zo wordt het begrip deelruimte gedefinieerd, gevolgd door een deelruimtecriterium.

Stelling • **Criterium voor deelruimten**

Zij $\mathbb{R},V,+$ een vectorruimte en W een niet-lege deelverzameling van V, dan zijn de volgende uitspraken equivalent:

1. $\mathbb{R},W,+$ is een deelruimte van $\mathbb{R},V,+$
2. $\forall\vec{u},\vec{v}\in W:\vec{u}+\vec{v}\in W$ en $\forall r\in\mathbb{R},\forall\vec{u}\in W: r\cdot\vec{u}\in W$
3. $\forall r,s\in\mathbb{R},\forall\vec{u},\vec{v}\in W: r\cdot\vec{u}+s\cdot\vec{v}\in W$

Het cruciale begrip lineaire combinatie wordt gedefinieerd, met in haar kielzog het begrip opspanning. Voor dat laatste koos ik er altijd voor om me te beperken tot opspanningen van eindige deelverzamelingen. Daarmee bleef de behandeling beperkt tot eindig-dimensionale vectorruimten. Het hield de verdere begrippen, redeneringen en bewijzen iets eenvoudiger.

Definitie • **Opspanning**

Zij D een eindige deelverzameling van een vectorruimte $\mathbb{R},V,+$.
De opspanning van D, notatie $\operatorname{Span} D$, is de verzameling van alle lineaire combinaties van D.

Met het deelruimtecriterium kan gemakkelijk bewezen worden dat zo'n opspanning altijd een deelruimte is. Die deelruimte kan V zelf zijn.

Definitie • Voortbrengend deel

Zij D een eindige deelverzameling van een vectorruimte $\mathbb{R},V,+$.
D is een voortbrengende verzameling of voortbrengend deel van V a.s.a. $\operatorname{Span} D = V$.
De elementen van D noemen we voortbrengende vectoren van V.

Vanaf hier begint de zoektocht naar een minimale verzameling die de hele vectorruimte voortbrengt. Die vereist de fundamentele begrippen van lineaire afhankelijkheid en onafhankelijkheid.

Voor de definitie van lineair (on)afhankelijke vectoren zijn er verschillende mogelijkheden. Ik gebruikte de volgende.

Definitie • Lineair (on)afhankelijke vectoren

Zij $D = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ een eindige deelverzameling van een vectorruimte $\mathbb{R},V,+$.

- D is lineair onafhankelijk a.s.a:

$$k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \cdots + k_p\vec{v}_p = \vec{0}_V$$
$$\Downarrow$$
$$k_1 = k_2 = \cdots = k_p = 0$$

- D is lineair afhankelijk a.s.a D niet lineair onafhankelijk is. Dit betekent:

$$\text{er bestaan } k_1, k_2, \ldots, k_p \in \mathbb{R}, \text{ niet alle nul,}$$
$$\text{waarvoor } k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \cdots + k_p\vec{v}_p = \vec{0}_V$$

Met die definitie kan vervolgens een criterium voor lineaire (on)afhankelijkheid bewezen worden.

Stelling • Criterium voor lineaire afhankelijkheid

Zij D een eindige deelverzameling van een vectorruimte $\mathbb{R},V,+$.
D is lineair afhankelijk a.s.a. minstens één vector van D te schrijven is als een lineaire combinatie van de andere vectoren.
In symbolen:

$$D \text{ is lineair afhankelijk}$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists \vec{v} \in D : \vec{v} \in \operatorname{Span}(D \setminus \{\vec{v}\})$$

Uit het criterium volgt dat een verzameling D lineair onafhankelijk is wanneer geen enkele vector als lineaire combinatie van de andere vectoren van D geschreven kan worden. Dat 'vrij zijn' van dergelijke afhankelijkheden tussen vectoren verklaart waarom een lineair onafhankelijke verzameling ook een vrij deel wordt genoemd.

Tijdens het schrijven van deze loep kwam de vraag waarom ik die volgorde heb gekozen. Het criterium sluit immers beter aan bij het concept van afhankelijkheid: een vector 'hangt af' van de andere. In dat opzicht zou het conceptueel logischer zijn het criterium hierboven als definitie te gebruiken, waardoor de definitie hierboven een criterium of eigenschap wordt. Zelf heb ik er geen sterke mening over en ik zou morgen met evenveel plezier de omgekeerde aanpak opnieuw proberen. Vermoedelijk wou ik, toen ik vele jaren geleden mijn cursus uitwerkte, die omschrijving die later voortdurend wordt gebruikt in bewijzen, als definitie meegeven, om die het grootste gewicht te geven. Maar er valt veel voor te zeggen om het omgekeerd te doen.

Terug naar de leerstof. Nu kunnen vrije, niet-voortbrengende delen uitgebreid worden en toch vrij blijven, en niet-vrije, voortbrengende delen uitgezuiverd worden en toch voortbrengend blijven.

Stelling • Uitbreiden van een vrij deel

Zij D een eindige deelverzameling van een vectorruimte $\mathbb{R},V,+$.
Als D lineair onafhankelijk is en $\vec{v}$ is een vector van V met $\vec{v} \notin \operatorname{Span} D$, dan is $D \cup \{\vec{v}\}$ nog steeds lineair onafhankelijk.

Stelling • Verkleinen van een voortbrengend deel

Zij D een eindige deelverzameling van een vectorruimte $\mathbb{R},V,+$.
Als D een voortbrengend deel van V is en $\vec{v}$ is een vector van D met $\vec{v} \in \operatorname{Span}(D \setminus \{\vec{v}\})$, dan is $D \setminus \{\vec{v}\}$ nog steeds een voortbrengend deel van V.

Hier aangekomen, wordt het interessant op zoek te gaan naar een deelverzameling D die tegelijkertijd voortbrengend en lineair onafhankelijk is, door het toevoegen of verwijderen van de juiste vectoren. Zo'n deelverzameling wordt een basis genoemd. Gezien de opbouw van de cursus hebben we het hier over eindige basissen.

Ook voor dit begrip is er een criterium.

Stelling • Criterium voor basis

Zij D een eindige deelverzameling van een vectorruimte $\mathbb{R},V,+$.

D is een basis van V

$\Updownarrow$

elke vector van V is op precies één manier te schrijven als lineaire combinatie van D

Dat criterium liet me toe de laatste stelling uit mijn cursus te bewijzen, namelijk dat alle basissen van een vectorruimte evenveel elementen hebben. Dat aantal noemen we de dimensie van de vectorruimte.

Stelling • Dimensiestelling (Steinitz-Grassmann)

Zij $B_1 = \{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_p\}$ en $B_2 = \{\vec{w}_1,\vec{w}_2,\ldots,\vec{w}_q\}$ twee basissen van een vectorruimte V, dan is $p = q$.

Vrij snel is het bewijzen van elke eigenschap een deel van de ingesteldheid geworden, al is het bij sommige leerlingen eerder een fatalistische overgave. Dat laatste zag ik niet per sé als een probleem: het moeten doorbijten en zwoegen op zware bewijzen is een voorwaarde om het gevoel van zegevieren te kunnen ervaren wanneer de moeilijke materie eindelijk overwonnen werd. Net zoals een Mont Ventoux geen 50 kilometer lang mag zijn, mag dergelijke leerstof geen maanden duren. Maar een stevig stukje theorie, niet noodzakelijk lang, maakt deel uit van een wiskundige vorming.

Het relatief grote aantal bewijzen is bovendien een derde potentieel voordeel van de rigoureuze aanpak. Heel vaak bevatten onze leerstofonderdelen slechts één bewijs of enkele bewijzen. Daardoor kunnen leerlingen ze zonder veel begrip uit het hoofd leren, of zelfs helemaal niet leren wegens toch relatief onbelangrijk voor hun score op een toets of examen. Naarmate het aantal bewijzen toeneemt, worden leerlingen echter gedwongen om ze anders te gaan studeren: zoeken naar kapstokken, ontdekken welke redeneringen gewoon logisch uit de vorige volgen en dus niet uit het hoofd geleerd moeten worden, letten op de grotere structuur van een lang bewijs, evenals de paar bijzondere overgangen. Bovendien maken bewijzen bij zulke leerstof een groot deel van de punten uit.

Verder wordt het na een tijdje ook mogelijk om deze wiskundig sterke leerlingen te vragen zelf eenvoudige, nieuwe eigenschappen aan te tonen: de technieken uit de diverse eerdere bewijzen vormen een gereedschapskist waaruit ze zelf moeten kiezen. Het zelf vinden van een nieuw bewijs is in die fase van hun vorming altijd een bron van verbazing en trots.

Voorbeelden van dergelijke eigenschappen zijn:

- Zij $\mathbb{R},V,+$ een vectorruimte en D_1 en D_2 twee niet-lege eindige deelverzamelingen van V, waarbij $D_1 \subseteq D_2$. Als D_2 lineair onafhankelijk is, dan is ook D_1 lineair onafhankelijk.
- Zij $\mathbb{R},V,+$ een vectorruimte en D_1 en D_2 twee niet-lege eindige deelverzamelingen van V. Als D_1 lineair afhankelijk is, dan is $D_2 = D_1 \cup \{\vec{v}\}$, met $\vec{v} \in V$, ook lineair afhankelijk.
- In een n-dimensionale vectorruimte met $n \geqslant 1$ geldt dat elk voortbrengend deel minstens n vectoren bevat.

Abstract afwisselen met concreet

Ondanks de hierboven vermelde voordelen brengt de abstracte, rigoureuze aanpak ook uitdagingen met zich mee. Niet elke leerling is even wiskundig aangelegd en de abstracte formuleringen en zware notaties (lineaire combinaties, indices, eventueel sommatietekens...!) kunnen het inzicht bemoeilijken en diepgaand begrip van de onderliggende concepten en redeneringen verhinderen. Dit kan demotiverend werken.

Het is daarom belangrijk om nieuwe definities en eigenschappen telkens concreet te maken, en dat ook als leerstrategie mee te geven, aan de hand van gekende verzamelingen:

- Is $-12+2x-5x^2 \in \text{Span}\{-2+2x-x^2,5+2x^2,3+2x+x^2\}$?
- Is $\{(1,2,1),(2,1,4),(3,3,5)\}$ een voortbrengend deel van $\mathbb{R}^3$?
- Is $\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\5\\-1\end{bmatrix}\right\}$ lineair onafhankelijk?

Dergelijke oefeningen geven aanleiding tot eenvoudige berekeningen en redeneringen, die de abstracte definities en eigenschappen geleidelijk

aan verduidelijken. Bovendien ontdekken leerlingen dat dergelijke vraagstukken telkens resulteren in lineaire stelsels, waarbij het aantal onbekenden, vergelijkingen of oplossingen verband houden met voortbrengendheid en lineaire (on)afhankelijkheid.

Ze zijn niet alleen voor iedereen nuttig om de leerstof beter te begrijpen, voor de minder sterke leerling bieden ze ook wat perspectief voor de toets of het examen.

Evaluatie

Op elke toets of examen vroeg ik, naast oefeningen zoals hierboven, enkele geziene bewijzen. Als ondersteuning kregen mijn leerlingen de lijst met alle eigenschappen, met dezelfde nummering als in de cursus: dat liet hen toe om naar andere eigenschappen te verwijzen aan de hand van hun nummer: "*Wegens eigenschap 13 kunnen we hieruit besluiten dat...*".

Ik gebruikte deze bewijzen-intensieve cursus ook om mijn leerlingen te leren dat de beste taal om een wiskundige stelling te bewijzen meestal het Nederlands is: vloeiende zinnen in plaats van louter wiskundige symbolen. We hebben in het secundair onderwijs de m.i. wat ongelukkige gewoonte ontwikkeld om bewijzen neer te schrijven als een compacte reeks pseudo-logische uitspraken met implicatie- of equivalentiepijlen ertussen en minimale tekst. Soms zelfs geen tekst. Alles zit in de symbolen, is de boodschap. Kijk eens hoe beknopt de wiskundetaal is! Alleen ben je als leerkracht niet zeker dat de leerling die taal begrijpt, zelfs wanneer de symbolen juist worden gereproduceerd. Als kind leerde je misschien ook ooit een gedicht in een vreemde taal vanbuiten: correcte reproductie, maar je snapte er geen jota van. Vandaar: zoveel mogelijk noteerde ik de redenering in doorlopende zinnen. Ik verwachtte daarom ook dat op evaluaties de redeneringen op een heldere manier werden uitgeschreven, afgewisseld met notaties in symbolen waar nodig of wenselijk. (Merk op dat in de kleine eerste bewijsjes, zoals van $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}_V$, een bewijs wel beter met symbolen wordt genoteerd. Het is geen wit-zwart-verhaal.)

Opvallend was dat het klasgemiddelde voor deze moeilijke materie vaak hoger was dan voor de reguliere leerstof. Uiteindelijk maken de talrijke bewijzen de evaluatie een stuk voorspelbaarder. Ik beken dat ik bewust niet overdreef met de moeilijkheid: ik wou vermijden dat leerlingen dergelijke abstracte aanpak zouden associëren met onhaalbaar moeilijk. Stiekem wou ik toch promotie maken voor die manier van werken. In onze 8u-cursus zaten nog zulke onderdelen: dan kun je er beter voor zorgen dat de eerste ervaring een voldoende positieve nasmaak achterlaat.

Niet enkel vectorruimten

In het vijfde jaar behandelden we ook een stukje getallenleer: deelbaarheid in $\mathbb{Z}$ en modulorekenen. Dit kon op veel bijval bij de leerlingen rekenen, al werd het ook rigoureus opgebouwd. Getallen zijn concreter dan vectoren, natuurlijk. De notaties en redeneringen in de bewijzen zijn minder nieuw. De cursus werd gekoppeld aan cryptografie en eindigde met het voor leerlingen indrukwekkende bewijs van het RSA-algoritme.

In het zesde jaar kwam dan een kennismaking met groepentheorie, gebaseerd op het SOHO-boekje met die naam ((bibliografie)). Daar investeerde ik toch ook een 20-tal lessen in. Ook daar lag de klemtoon op het opbouwen van goede bewijzen, uitgeschreven in doorlopende zinnen.

Voor veel leerlingen bleven de vectorruimten echter het meest indrukwekkende dat ze in de lessen wiskunde hadden beleefd. Alle begin is moeilijk. En een moeilijk begin laat vaak een heroïsche herinnering na.

3 Vanuit zelfstandig onderzoeken

We lazen in deze loep verschillende methodes om vectorruimten te introduceren. Als eerste was er een concrete, gestuurde (klassieke) aanpak in paragraaf 1 waar de leerkracht vanuit een selectie goedgekozen (tegen)voorbeelden zelf vectorruimten introduceert met aandacht voor het meetkundige aspect. Ten tweede hadden we een axiomatische, formele aanpak in paragraaf 2 waar de vectorruimten als puur symbolisch object binnenvallen om leerlingen in aanraking te brengen met abstracte wiskunde. Nu gaan we in op een aanpak die we terugvonden in de vakdidactische literatuur. Daarin wordt gebruik gemaakt van open problemen om vectorruimten aan te brengen, en de bijhorende concepten te introduceren. Daarbij gaan leerlingen (grotendeels) zelfstandig op onderzoek. Op deze manier kunnen leerlingen ervaren wat het is om *zelf* wiskundige te zijn en nieuwe wiskunde uit te vinden. Het komt ook hun creativiteit en zelfstandigheid in het sturen van het leerproces ten goede.

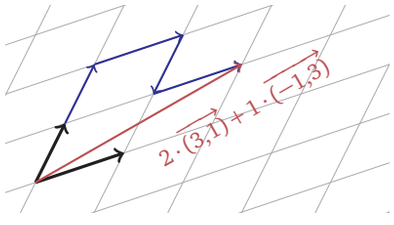
We werken in deze paragraaf concrete voorbeelden uit van zulke open problemen, die de aanleiding kunnen zijn voor het definiëren van vectorruimten, voortbrengende verzamelingen, basis, ... Ze vormen geen cursus noch leerlijn op zich, maar zijn bedoeld als inleidend groepswerk vóór je klassikaal een nieuw concept definieert, of als prikkelende huistaak ná de les. Beschouw het als een menu, waaruit je een boeiende oefening kunt kiezen als aanvulling op de cursus. Als je verder wil kijken naar de dessertkaart, met alternatieve probleemcontexten om vectorruimten te introduceren, dan kun je in (Trigueros & Wawro, 2020) en (Stewart e.a., 2019) een overzicht vanuit de literatuur terugvinden.

We stelden deze lesmaterialen op in Ximera, een vernieuwend pakket van LaTeX. Concreet betekent dit dat het lesmateriaal zowel als interactieve website beschikbaar is (op https://wiskunde.opmaat.org/uitwiskeling), maar ook als gedrukt document (downloadbaar via pdf op diezelfde website). In dit deel van de loep tonen we de grote lijnen van het materiaal, met tussengevoegde uitleg en uitgelichte oefeningen.

3.1 Lineaire combinaties, lineaire onafhankelijkheid en voortbrengend deel

Vooraleer we aan de definitie van een vectorruimte toe zijn, laten we de leerlingen eerst aan den lijve ervaren wat het is om zelf zo'n (nog niet als zodanig benoemde) vectorruimte te maken. Dat houdt in dat leerlingen zelf lineaire combinaties knutselen van concrete vectoren, zich afvragen welke plaatsen in $\mathbb{R}^2$ bereikbaar zijn met dergelijke lineaire combinaties, om dan af te sluiten met de invloed van lineaire (on)afhankelijkheid op de bereikbare plaatsen. Daarvoor kun je gebruikmaken van de "Taak van het magische tapijt", die we overnemen uit het online beschikbare, Amerikaanse onderzoeksproject "Inquiry-Oriented Linear Algebra (IOLA)"(Wawro e.a., 2013). Dit project wordt ontwikkeld voor het Amerikaanse hoger onderwijs, waar studenten voor de eerste keer met abstracte structuren in aanraking komen (wat wij in Vlaanderen al deels in het middelbaar zien). Je zal dan ook zien dat de "Taak van het magische tapijt", zoals ook andere taken van (IOLA), weinig wiskundige voorkennis veronderstelt, maar wel tot boeiende leerervaringen komt met de betekenis van een 'vectorruimte'.

Concreet onderzoeken leerlingen in de "Taak van het magische tapijt" twee verschillende vervoersmiddelen: *een hoverboard dat altijd in richting* (3,1) *beweegt en een magisch tapijt dat altijd in richting* (1,2) *vliegt. Kunnen ze met die vervoersmiddelen hun oom Gauss bezoeken, die woont op* (107,64)*?* Dat is de vraag die leerlingen zelf ontrafelen met de op-een-gepast-moment geïntroduceerde definities van de leerkracht. Het verhaaltje van het magisch tapijt en de hoverboard is hier natuurlijk enkel om het geheel in te kaderen; de essentie is dat leerlingen met concrete vectoren (zowel op een tekening als algebraïsch) puzzelen om de vraag te kunnen beantwoorden. Daarbij zullen ze bijvoorbeeld zelfstandig lineaire combinaties gebruiken en biedt de context de mogelijkheid om een rijk beeld van een "lineaire combinatie" te vormen. In Figuur 3 zie je een voorbeeld van een eerste mogelijk pad dat een leerling kan opschrijven, en hoe je het kan herschrijven als een klassieke lineaire combinatie.



Figuur 3 *– Een mogelijk pad met de vervoersmiddelen, en herschrijven als lineaire combinatie.*

Het begrip van "lineaire combinatie" wordt onmiddellijk ook uitgediept door de leerlingen zelf: welke coëfficiënten mogen gebruikt worden? Kan je altijd zo hercombineren? ... Nog voor je de definitie van een lineaire combinatie geeft, hebben ze dus eigenlijk al een diep beeld van dat begrip!

Verder op hun pad veralgemenen ze hun bevindingen naar $\mathbb{R}^3$ en eindigen ze met het zelfstandig opstellen van (tegen)voorbeelden van lineair (on)afhankelijke verzamelingen in $\mathbb{R}^n$. Naar die voorbeelden kunnen ze verder in de lessenreeks teruggrijpen wanneer extra definities geïntroduceerd worden. Concreet vullen de leerlingen in onderstaande Tabel 1 een specifieke verzameling in per cel (of vullen ze "onmogelijk" in). We vulden in het rood al enkele cellen in ter illustratie. Bijkomend kan je je leerlingen ook vragen om expliciet uit te leggen welke andere voorbeelden nog mogelijk zijn, of waarom geen voorbeelden mogelijk zijn.

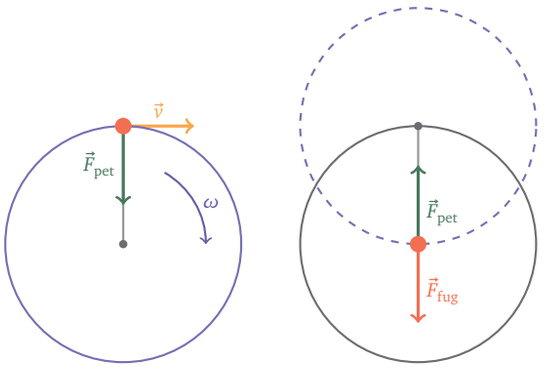
Beschrijving	Lineair afhankelijk	Lineair onafhankelijk
Een verzameling van 2 vectoren in $\mathbb{R}^2$	$\left\{ \begin{array}{c} (1,2) \\ (-2,-4) \end{array} \right\}$	
Een verzameling van 3 vectoren in $\mathbb{R}^2$		Onmogelijk
Een verzameling van 2 vectoren in $\mathbb{R}^3$		
$\vdots$		
Een verzameling van 1 vector in $\mathbb{R}^2$	$\{(0,0)\}$	

***Tabel 1** – Een in te vullen overzicht van lineair (on)afhankelijke verzamelingen. De laatste rij ter illustratie van de speciale status van $\vec{0}$, wat we aanraken in paragraaf 4.*

3.2 Basis en dimensie

Nadat de leerlingen intuïtie hebben opgebouwd rond lineaire onafhankelijkheid en voortbrengende verzamelingen, kunnen basissen in principe al gedefinieerd worden. Dat zijn dan simpelweg speciale verzamelingen die beide eigenschappen bezitten: zowel lineair onafhankelijk als voortbrengend voor een volledige ruimte. Allemaal goed en wel, maar waarom zouden zulke verzamelingen dan boeiend zijn? Leerlingen zijn hier volledig in hun recht om te reageren met “Who cares?”. Er is namelijk al een perfecte basis binnen bijvoorbeeld $\mathbb{R}^2$: hij is orthogonaal, genormeerd, … en hij wordt toch al standaard gebruikt. Dan spreken we natuurlijk over de aloude $\{(1,0),(0,1)\}$.

Één manier om het nut van een ‘basis’ als concept te kaderen, is door *verschillende* basissen te gebruiken. Laat ons als inleidend voorbeeld het ‘assenstelsel’ (ook wel het ‘referentiestelsel’) uit de fysica beschouwen. Het is pas als je je assenstelsel vastlegt (dus basisvectoren kiest) dat je problemen kan oplossen, en de keuze van assenstelsel kan de moeilijkheidsgraad van het probleem beïnvloeden. Als illustratie in Figuur 4 beschouwen we in bovenaanzicht een ronddraaiend balletje (rood) met een touwtje aan een ankerpunt (zwart). In de linkerfiguur leggen we de oorsprong op het ankerpunt en staat het assenstelsel vast op het aardoppervlak (niet getekend). In de rechterfiguur leggen we de oorsprong op het rode balletje zelf en draait het assenstelsel mee.



***Figuur 4** – De krachten bij een horizontaal ronddraaiend balletje (rood) in een stilstaand (links) en een meedraaiend (rechts) assenstelsel. De assen zelf staan niet aangeduid.*

In het stilstaand assenstelsel (links) heeft het balletje een veranderende snelheid. Volgens Newton moet er dan ook een kracht werken op het balletje dat die snelheidsverandering teweeg brengt, wat men de centripetale kracht $\vec{F}_{pet}$ noemt. In het meedraaiend assenstelsel (rechts) ligt het balletje stil en schijnt het ankerpunt rond te draaien. Om stil te kunnen liggen moeten volgens Newton de krachten op het rode balletje optellen tot nul. Dat verklaart waarom het balletje zowel een ‘fictieve’ centrifugale kracht $\vec{F}_{fug}$ als een centripetale kracht voelt. De verschillende assenstelsels (basissen) geven een verschillend antwoord voor de positie en baan van het rode balletje, maar zijn elk nuttig om de centrifugale kracht uit te leggen. Basissen (of dus assenstelsels in de fysica) zijn pas nuttig, als je er verschillende kan hebben.

Het nut van basissen kan ook bij leerlingen binnenkomen, en zelfs zonder de fysica-elementen. We pasten hiervoor een bestaande oefening uit het Amerikaanse IOLA-project aan (Wawro e.a., 2013). Zoals gezegd, vind je de volledige oefening op https://wiskunde.opmaat.org/uitwiskeling. In deze oefening gebruiken de leerlingen twee verschillende basissen voor $\mathbb{R}^2$, stellen ze een matrix op om van de ene naar de andere basis over te schakelen, en benoemen ze expliciet het voordeel van een andere basis te gebruiken. We hernemen het verhaal van het magische tapijt, maar je kan dit ook anders inkaderen.

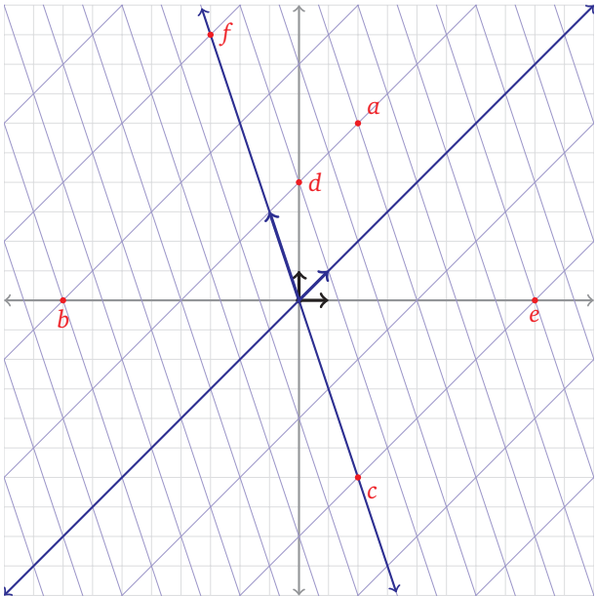
LESACTIVITEIT

Op verkenning met verschillende coördinatenstelsels

Zoals in de "Taak van het magische tapijt" gebruiken we twee vervoersmiddelen, maar met twee andere richtingen deze keer:

- **Hoverboard**: We duiden de beperking van de beweging van het hoverboard aan met de vector $\overrightarrow{(1,1)}$. Hiermee bedoelen we dat als het hoverboard één uur "vooruit" zou bewegen, het langs een "diagonaal" pad zou bewegen dat zou resulteren in een verplaatsing van 1 kilometer naar het oosten en 1 kilometer naar het noorden van zijn startlocatie.
- **Magisch tapijt**: We duiden de beperking van de beweging van het magische tapijt aan met de vector $\overrightarrow{(-1,3)}$. Hiermee bedoelen we dat als het magische tapijt één uur "vooruit" zou bewegen, het langs een "diagonaal" pad zou bewegen dat zou resulteren in een verplaatsing van 1 kilometer naar het westen en 3 kilometer naar het noorden van zijn startlocatie.

Hieronder vind je de kaart met zes locaties die je moet bezoeken: a, b, c, d, e en f. In het zwarte coördinatenstelsel worden de standaardeenheden gebruikt (1 km naar het oosten is $+1$ in de x-richting, 1 km naar het noorden is $+1$ in de y-richting).



1 Schrijf de coördinaten van elk van de bovenstaande punten ten opzichte van zowel het blauwe als het zwarte coördinatenstelsel.

✔ *Bijvoorbeeld punt a heeft coördinaat* (2,6) *in het zwarte stelsel en* (3,1) *in het blauwe stelsel. Punt b heeft coördinaat* (−8,0) *in het zwarte stelsel en* (−6,2) *in het blauwe stelsel.*

2 Wat is de meeteenheid van het blauwe assenstelsel? Waarvoor staat bijvoorbeeld coördinaat (3,1)?

✔ *De vectoren* $\overrightarrow{(1,1)}$ *en* $\overrightarrow{(-1,3)}$ *vormen de basis van het blauwe assenstelsel, en zijn gemeten in kilometer per uur. Coördinaat* (3,1) *wordt gemeten in uur: 3 uur met het hoverboard, en 1 uur met tapijt. Opgepast, die uren kunnen ook negatief zijn: dan gebruik je het vervoersmiddel achterwaarts.*

3 Bepaal een matrix die coördinaten ten opzichte van het blauwe coördinatenstelsel omzet naar coördinaten in het zwarte coördinatenstelsel.

✔ *Om van blauw naar zwart om te zetten, vermenigvuldig je de coördinaat met de matrix* $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Je kan hier enkele hints voorzien voor de leerlingen, door bijvoorbeeld een concreet voorbeeld uit te rekenen.

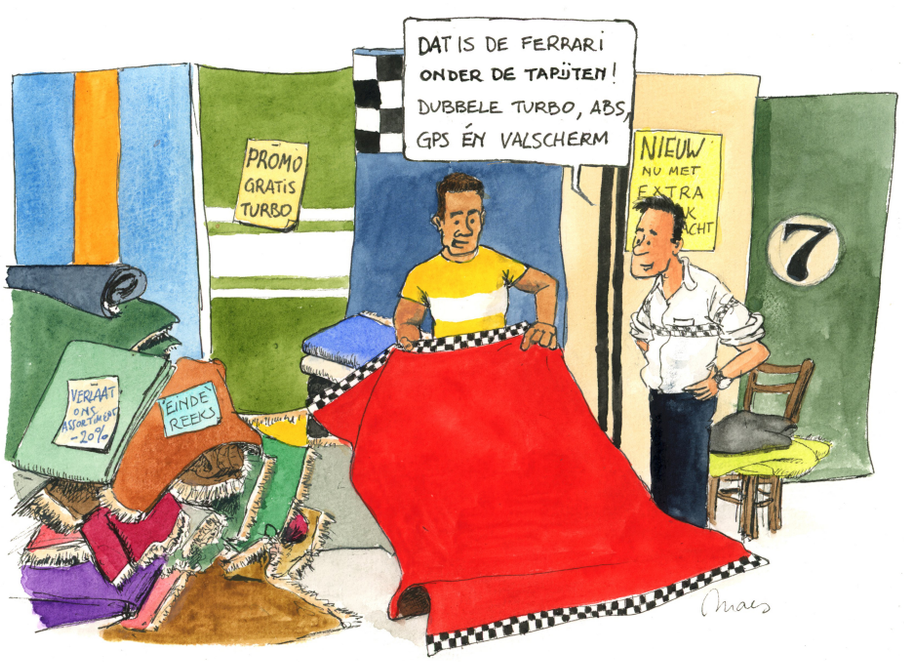
4 Bepaal ook een matrix die coördinaten ten opzichte van het zwarte coördinatenstelsel omzet naar coördinaten in het blauwe coördinatenstelsel.

✔ *Om van zwart naar blauw om te zetten, vermenigvuldig je de coördinaat met de inverse van die matrix, namelijk* $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

5 Gebruikmakend van de blauwe coördinaten, hoeveel tijd neemt het in totaal in beslag om de volgende route af te leggen: $a \to b \to c$?

✔ *De blauwe coördinaten van de punten zijn:* $a : (3,1)$, $b : (-6,2)$, $c : (0,-2)$. *De verplaatsing van* a *naar* b *is:* $(-6,2)-(3,1)=(-9,1)$. *Dit betekent dat je 9 uur achteruit op het hoverboard moet en 1 uur vooruit op het magische tapijt. De verplaatsing van* b *naar* c *is:* $(0,-2)-(-6,2)=(6,-4)$. *Dit betekent dat je 6 uur vooruit op het hoverboard moet en 4 uur achteruit op het magische tapijt. Alles samengenomen duurt de route 20 uur.*

Door basissen onmiddellijk te introduceren met hun praktisch nut ontlok je van leerlingen ook niet de vraag “waarom dit belangrijk is”. In hun eigen onderzoek hebben ze immers net doorleefd dat het omzetten van basis problemen kan vereenvoudigen. Je kan bovenstaande oefening eventueel nog uitbreiden, bijvoorbeeld door je leerlingen een expliciete formule te laten opstellen voor de reistijd van punten (x_1, y_1) naar (x_2, y_2) in het zwarte coördinatenstelsel.



3.3 Deelruimten (en vectorruimten)

In de voorgestelde leeractiviteiten hebben we tot nog toe vectorruimten nog niet gedefinieerd. Dat was op zich ook niet nodig: alle activiteiten steunden op reeds aanwezige kennis van $\mathbb{R}^n$ en 'vectoren' (als pijlen). Ook de concepten van 'lineaire onafhankelijkheid', 'voortbrengende verzameling' en 'basis' kunnen binnen die context gedefinieerd worden, zonder noodzakelijkerwijs iets over vectorruimten an sich te zeggen. In het vervolg stellen we nu zelf een lesactiviteit voor om vectorruimten te introduceren, maar zoals gezegd bepaalt u zelf waar deze valt in de lessen over vectorruimten. Dat hoeft niet in het begin te zijn.

In paragraaf 1 werden de vectorruimten geïntroduceerd aan de hand van vele verschillende (tegen)voorbeelden, en het inzicht dat vele objecten binnen de wiskunde eenzelfde 'vectorruimte'-structuur hebben. Dat inzicht kwam dan grotendeels gestuurd vanuit de leerkracht zelf, waarna de verdere leidende vraag was "Wat zou een wiskundige nu onderzoeken?". In paragraaf 2 kwamen de vectorruimten puur naar voren vanuit de formele axioma's, als bijna volledig symbolisch object, en werd er eventueel later nog de link gemaakt naar concrete voorbeelden. Wij maken in deze paragraaf de keuze van de middenweg: niet vele voorbeelden en ook niet geen voorbeelden, maar 1 sprekend voorbeeld om vectorruimten te introduceren.

We maken daarvoor gebruik van 'magische vierkanten'. Dat zijn vierkanten waar iedere cel ingevuld wordt met de getallen 1,2,...,n^2 , op een wel heel speciale manier. Bij iedere kolom, rij en beide diagonalen moet de som hetzelfde zijn. Die constante som noemen we dan ook de 'magische constante' C. Een typisch voorbeeld is onderstaand 3×3-vierkant met magische constante $C = 15$.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Deze magische vierkanten zijn al duizenden jaren gekend, in verschillende culturen wereldwijd en kregen occulte eigenschappen toegekend. In de moderne tijd worden ze veelal bestudeerd in de recreatieve wiskunde (Andrews, 1917), waarbij men zich bijvoorbeeld afvraagt: "Hoeveel dergelijke magische vierkanten zijn er?" en "Zijn er magische vierkanten die nog steeds magisch zijn, als je de buitenste rijen en kolommen verwijdert?" Om de brug naar vectorruimten te maken, beschouwen we hier echter magische vierkanten met getallen uit $\mathbb{R}$ in plaats van enkel $\mathbb{N}$. We houden het in dit verhaal in eerste instantie op 3×3-vierkanten voor de behapbaarheid. De vierkanten hieronder zijn in ons perspectief ook magisch.

0.5	-1	2
2	0.5	-1
-1	2	0.5

0	$-3\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$
$3\sqrt{2}$	0	$-3\sqrt{2}$
$-3\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	0

Het open probleem voor de leerlingen is vervolgens om zoveel mogelijk magische vierkanten van orde 3×3 te vinden. Mogelijks maken de leerlingen enkele concrete vierkanten of beseffen ze dat je een vierkant ook kan spiegelen en het nog steeds magisch blijft. Hoogstwaarschijnlijk zullen leerlingen echter teruggrijpen naar hun algebraïsche vaardigheden met stelsels van vergelijkingen. Het is daarbij niet de bedoeling dat leerlingen een volledige algebraïsche oplossingsverzameling opstellen voor de magische vierkanten, maar dat ze ervaren hoe onhandig dergelijke beschrijving is van de magische vierkanten. U beperkt dus best hun rekenwerk(pogingen) in de tijd, of neemt tijdig over met ICT. Magische vierkanten zien als een vectorruimte biedt ten slotte een mooie (en gemakkelijker veralgemeenbare) manier om dit probleem op te lossen.

De algebraïsche methode zou ongeveer als volgt gaan. Als je de getallen benoemt met $s_{ij} \in \mathbb{R}$ voor het getal in rij i en kolom j, dan ziet het magische vierkant er uit als:

s_{11}	s_{12}	s_{13}
s_{21}	s_{22}	s_{23}
s_{31}	s_{32}	s_{33}

De bijhorende vergelijkingen leveren het onderstaande (monster)stelsel op:

$$\begin{cases} s_{11}+s_{12}+s_{13} &= C \\ s_{21}+s_{22}+s_{23} &= C \\ s_{31}+s_{32}+s_{33} &= C \\ s_{11}+s_{21}+s_{31} &= C \\ s_{12}+s_{22}+s_{32} &= C \\ s_{13}+s_{23}+s_{33} &= C \\ s_{11}+s_{22}+s_{33} &= C \\ s_{13}+s_{22}+s_{31} &= C \end{cases}$$

Handmatig kan je wel nog nuttige vergelijkingen afleiden, bijvoorbeeld dat $s_{22} = \frac{C}{3}$, maar het lijkt

grotendeels ondoenbaar. Aan de hand van ICT kun je natuurlijk het stelsel rijreduceren, maar erg verhelderend is dat niet.

De methode met vectorruimten gaat anders verder. We willen zo veel mogelijk magische vierkanten beschrijven, en in een inleidende oefening hebben de leerlingen al 2 magische vierkanten gevonden. In plaats van ze allemaal in 1 formule te willen beschrijven, kunnen ze ook reeds verkregen magische vierkanten hercombineren tot nieuwe magische vierkanten. Stel dat M en N twee magisch vierkanten van orde 3×3 zijn. Dan zal $M+N$ ook een magisch vierkant zijn van dezelfde orde, alsook $k\cdot M$ voor een willekeurige $k\in\mathbb{R}$. De magische vierkanten gedragen zich met andere woorden net zoals de vectoren in het vlak; je kan ze optellen en uitrekken met een factor! De verzameling van magische vierkanten van orde 3×3, hier genoteerd als $\mathbb{M}^{3\times 3}$, vormt met de elementsgewijze optelling en scalaire vermenigvuldiging effectief een vectorruimte. Je kan zelf, of met de leerlingen, de andere voorwaarden nog controleren. Dat kan je als leerkracht ook inzien door in het vorige stelsel C weg te werken door substitutie. De magische vierkanten zijn dan precies de oplossingsverzameling van een homogeen lineair stelsel, en dus vormen ze een vectorruimte.

Op dit punt neem je best de leerlingen terug bij de hand, en geef je hun enkele magische vierkanten A, B en C cadeau. Zij moeten dan nog beargumenteren hoe je daarmee vele andere magische vierkanten kan bekomen (namelijk met de voortgebrachte ruimte van $\{A,B,C\}$). Een interessante keuze voor de gegeven magische vierkanten is de volgende:

$$A=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&1\\\hline 1&1&1\\\hline 1&1&1\\\hline\end{array}\qquad B=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&1&-1\\\hline -1&0&1\\\hline 1&-1&0\\\hline\end{array}$$

$$C=\begin{array}{|c|c|c|}\hline -1&1&0\\\hline 1&0&-1\\\hline 0&-1&1\\\hline\end{array}$$

We kozen hier deze vierkanten, omdat ze lineair onafhankelijk zijn, *en* de lineaire onafhankelijkheid valt ook te beargumenteren door de leerlingen zonder veel rekenwerk. Het open probleem is nu opgelost. Door getallen $x,y,z\in\mathbb{R}$ te kiezen, vind je met $xA+yB+zC$ altijd een magisch vierkant. We gaan daarbij nog niet zo ver om te stellen dat *ieder* magisch vierkant van orde 3×3 bereikt wordt; daarvoor kan je nog het algebraïsche stelsel met ICT uitwerken. Dat levert inderdaad een dimensie van 3. Los van het rekenwerk kan je dat ook intuïtief maken bij je leerlingen, door bijvoorbeeld het eerste magische vierkant te schrijven als $5A-B-3C$.

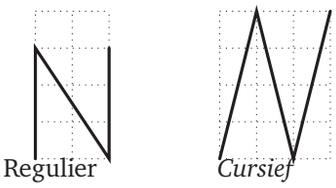
Met de magische vierkanten is er een begrijpbaar, maar voldoende exotisch voorbeeld van een vectorruimte om het concept te introduceren. Dat potentieel van magische vierkanten voor het onderwijzen van vectorruimten werd al eerder opgemerkt in de literatuur (Dorier, 2000; van Luijk, 2024), en ook in Uitwiskeling zelf in nummers 24/3 en 1/2. Merk tenslotte nogmaals een verschil op met de eerdere paragrafen. We positioneerden vectorruimten hier als een elegante manier om problemen op te lossen, eerder dan vanuit leerkrachtgekozen (tegen)voorbeelden of vanuit de formele axioma's de definitie op te leggen. De context van de magische vierkanten kan eventueel nog uitgebreid worden, om 'deelruimte' te introduceren. Zo vormen de magische vierkanten $\mathbb{M}^{3\times 3}$ een deelruimte van de klassieke vectorruimte van 3×3 matrices, maar hebben ze zelf ook nog een kleinere deelruimte, namelijk de magische vierkanten met magische constante 0. Om het abstracte begrip van een vectorruimte te vervolledigen kan het echter interessanter zijn om vervolgens de lijst van (tegen)voorbeelden uit paragraaf 1 aan de leerlingen voor te leggen.

3.4 Matrices als transformaties

In voorgaande paragrafen kwamen lineaire transformaties van vectorruimten nog niet aan bod. We gebruikten wel matrices om lineaire stelsels voor te stellen, of bijvoorbeeld lineaire onafhankelijkheid te controleren, en ook wel als concreet voorbeeld van een vectorruimte, maar nog niet om verschillende vectorruimtes met elkaar te linken. Om ook de brug te slaan met het hoger onderwijs, waar lineaire transformaties de hoofdbrok vormen van lineaire algebra, lijkt het gepast om toch wat aandacht te besteden aan dit onderwerp in het secundair onderwijs. Dat hoeft niet groot te zijn, maar kan als toepassing op de vroegere geziene matrixvermenigvuldiging. Meer specifieke voorkennis is ook niet vereist om de connectie te maken naar transformaties. We werkten een concrete voorbeeldactiviteit uit waarin leerlingen het vlak transformeren aan de hand van matrixvermenigvuldigingen.

Het open probleem is om getypte letters in lettertype `Regular` om te zetten naar *`Cursief`*. Daar-

voor beginnen ze van onderstaande tekening die een “N” weergeeft op een rooster.



De leerlingen stellen eerst zelfstandig een matrix op, bijvoorbeeld door variabelen a,b,c,d voor de elementen van de matrix te introduceren en een stelsel van vergelijkingen op te lossen. De gevonden transformatiematrix wordt vervolgens uitgesplitst in twee opeenvolgende stappen: eerst verticaal uitrekken, en vervolgens horizontaal scheeftrekken. Het vermenigvuldigen van matrices wordt expliciet gelinkt aan samenstellen van transformaties. Dat verklaart bovendien onmiddellijk waarom matrixvermenigvuldiging niet commutatief kan zijn; het samenstellen van transformaties in het vlak is dat ook niet! Roteren en verschuiven commuteren bijvoorbeeld ook niet. Na het opstellen van de transformatiematrix voor de letter “N” blijft nu nog de vraag voor je leerlingen: “Zou de letter ‘A’ een andere transformatiematrix hebben?”. In een korte berekening verifiëren ze dat ook voor andere letters, en zelfs gelijk welk punt in het vlak, dezelfde transformatiematrix geldt.

Je kan deze activiteit nog uitbreiden door ook andere transformaties te beschouwen (zoals rotatie, verschuiving, spiegeling, ...). Eventueel koppel je ook met deelruimten. Als een verzameling K punten in het vlak onveranderd blijft onder een lineaire transformatie A (met andere woorden $AK = K$), dan is K een deelruimte. In het voorbeeld daarnet is de horizontale lijn $y = 0$ onveranderd onder de transformatie, waardoor we onmiddellijk weten dat die lijn zelf een deelruimte is van het vlak. Met ‘je kan ... nog uitbreiden’ bedoelen we meer dan een vage mogelijkheid: jij, de lezer, kunt het gepresenteerde leermateriaal zelf bewerken en aanpassingen voor iedereen beschikbaar stellen. Op https://wiskunde.opmaat.org/uitwiskeling vind je de leermaterialen als website, maar op het online platform Github op https://github.com/opmaat/uitwiskeling vind je de broncode in LaTeX. De korte uitleg om zelf van start te gaan, vind je op https://github.com/XimeraProject/ximeraFirstSteps. Je zou bijvoorbeeld een oefening kunnen toevoegen waarin leerlingen het “$\forall$”-symbool proberen te maken met een transformatie van een gegeven “A”.

3.5 Nabeschouwing van onderzoekend leren

In deze paragraaf wilden we aantonen dat onderzoekend leren zeker mogelijk is bij het aanbrengen van vectorruimten. De bovenstaande leeractiviteiten over lineaire combinaties, basissen, het definiëren van vectorruimten en deelruimten, en matrixtransformaties zijn daar stuk voor stuk goede voorbeelden van. We willen deze paragraaf afsluiten met een laatste pleidooi om onderzoekende elementen op te nemen in je lessenreeks over vectorruimten.

We willen als leerkrachten allemaal leerlingen opleiden die actief betrokken zijn bij de leerstof, en in het ideale verhaal, leerlingen die zelf op zoek willen gaan naar ‘meer’ en het ‘waarom’. De fonkelende oogjes wanneer ze geïntrigeerd zijn (zelfs door abstracte wiskunde!) of de luide ‘AHA’-momenten wanneer ze zelf iets ontdekken, zijn goud waard. Meer zelfs, die onderzoekscompetenties zijn vaardigheden die de onderwijsdoelen expliciet vereisen, zoals onderwijsdoel 06.44 voor Wiskunde in de derde graad vermeldt: “De leerlingen voeren onderzoek aan de hand van een wetenschappelijke methode om kennis te ontwikkelen en om vragen te beantwoorden.” Laat ons het onderzoekend leren dan ook niet alleen reserveren voor de afgezonderde, lijvige onderzoeksprojecten, maar ook kleinschalig verweven in de dagdagelijkse lessen. Vectorruimten biedt daar de uitgelezen gelegenheid toe.

De leerlingen beschikken, zoals eerder aangehaald, ten eerste al over een uitgebreide voorkennis: axiomatische eigenschappen van optelling en vermenigvuldiging bij getallen, werken met pijlvectoren en werken met matrices en stelsels (eventueel zelfs ruimemeetkunde). Een gebrek aan voorkennis of vaardigheden zou het probleem niet mogen zijn bij onderzoekende leeractiviteiten voor vectorruimten.

Ten tweede worden de vectorruimten behandeld bij de oudste leerlingen van het middelbaar in de sterk wiskundige richtingen; een groep waarvan verwacht wordt dat een zekere wiskundige maturiteit en zelfsturing in het leerproces aanwezig is. Zelfs als die maturiteit nog niet aanwezig zou zijn, is dit het moment om in te zetten op zelfstandig onderzoeken en begrijpen van wiskundige concepten. Dat is een vaardigheid die broodnodig zal zijn in het snelvolgende hoger onderwijs met zijn abstracte hoorcolleges en (te) druk bezette oefenzittingen.

Er zijn natuurlijk ook mogelijke bezwaren tegen onderzoekend leren. Het vergt meer tijd, het vraagt meer voorbereidingswerk, het heeft minder kans op slagen bij zwakkere leerlingen, … Dat zijn allemaal terechte bedenkingen, en we onderschrijven die. Het is zeker niet onze intentie om onderzoekend leren als heilige graal voor te stellen. Daarom maakten we korte activiteiten, waaruit de lezer met zijn eigen expertise kan kiezen als uit een menukaart, en open-source gedeeld zodat je ze gemakkelijk kunt aanpassen aan je eigen klascontext. We stelden ze hier trouwens voor als inleidende activiteiten, maar niets houdt je tegen om ze als oefening te gebruiken nadat je via een andere aanpak de concepten definieerde in de klas. Het zou ons alleen jammer lijken om zo'n boeiend onderwerp als vectorruimten aan te brengen, maar geen ruimte te maken voor de zelfstandige experimenten van leerlingen met die vectoren…

4 Gekende problemen

We lijsten in deze paragraaf enkele concrete, gekende problemen op bij vectorruimten. Na ons lijstje nemen we een breder perspectief en kaderen we meer algemene problemen binnen in de vakdidactische theorie van de "drie werelden". Een eerste proever van de lijst gekende moeilijkheden is de speciale status van de nulvector $\vec{0}$. Typische fouten zijn ...

- ... denken dat de nulvector geen echte vector is (of eerder een punt of oorsprong van het assenstelsel), omdat die geen richting heeft. Bij oefeningen waar de vector $\vec{0}$ het eindantwoord is, vermoeden leerlingen onterecht dat ze een fout gemaakt hebben, of iets speciaals aangetoond hebben (zoals lineaire onafhankelijkheid) zelfs als dat niet het geval is. Construeer dus zeker ook enkele oefeningen waar het eindantwoord de nulvector is.
- ... denken dat iedere nulvector eruit moet zien als de klassieke $(0,0,\ldots,0)$. Jij kunt als leerkracht het voorbeeld uit paragraaf 1 nemen waarbij $\mathbb{R}^+$ uitgerust wordt met een andere optelling en scalaire vermenigvuldiging (en 1 de nulvector wordt)
- ... denken dat een verzameling zonder nulvector toch een deelruimte kan zijn (door niet alle voorwaarden te controleren). Een illustratief voorbeeld is het positieve halfvlak $\left\{(x,y)|x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_0^+\right\}$ met enkel strikt positieve scalairen. Dat is wel gesloten onder optelling en scalaire vermenigvuldiging, maar vormt geen deelruimte.
- ... niet beseffen dat verzamelingen met de nulvector sowieso lineair afhankelijk zijn. Een provocerende vraag voor je leerlingen is hier: is de verzameling $\{\vec{0}\}$ lineair onafhankelijk? En wat met $\{\vec{0}, \vec{v}\}$?

Een tweede veelvoorkomend probleem is het verwarren van verschillende gelijkaardig klinkende concepten. We geven je een lijstje van gelijkaardig klinkende termen met "lineair" in de naam: iets om met je leerlingen te delen of hen zelf te laten maken!

- Lineaire combinatie: een expressie van de vorm $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ of $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_n\vec{v}_n$, waarbij c_i getallen zijn, x_i onbekenden en $\vec{v}_i$ onbekende vectoren.
- Lineaire vergelijking: een vergelijking van de vorm $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = b$ of $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_n\vec{v}_n = b$, waarbij c_i en b getallen zijn, x_i onbekenden en $\vec{v}_i$ onbekende vectoren. Cruciaal is het een vergelijking (dus met een gelijkheidsteken), waarbij een lineaire combinatie gelijkgesteld wordt aan een ander getal of vector.
- Lineaire functie: een functie $f : V \to W$ die voldoet aan $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$ en $f(c\vec{x}) = cf(\vec{x})$ voor alle $\vec{x}, \vec{y} \in V$ en alle $c \in \mathbb{R}$.
- Lineaire afhankelijkheid: een verzameling vectoren $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ is lineair afhankelijk als er een niet-triviale, lineaire combinatie is die de nulvector oplevert. In symbolen: er bestaan scalairen $c_1, c_2, \ldots, c_n$, niet allemaal nul, zodat $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_n\vec{v}_n = \vec{0}$.
- Lineaire onafhankelijkheid: een verzameling vectoren $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ is lineair onafhankelijk als er geen 'boeiende' lineaire combinaties zijn die de nulvector opleveren. De enige oplossing van de vergelijking $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_n\vec{v}_n = \vec{0}$ is de triviale oplossing (alle $c_i = 0$).

De eerder besproken moeilijkheden zal je zeker tegenkomen in lessen over vectorruimten. Ze dringen echter nog niet door tot de essentie van wat er moeilijk kan gaan in het leren over vectorruimten. Daarom grijpen we terug naar het vakdidactisch onderzoek rond lineaire algebra, en geven we twee voorbeelden van zulke 'diepere' problemen.

Vakdidactisch onderzoek naar lineaire algebra (en dus vectorruimten) kwam pas in de jaren 1980 op gang. Vanuit Frankrijk kwam oorspronkelijk de kreet om meer onderzoeksaandacht te besteden

aan het universiteitsvak lineaire algebra: zelfs na verschillende lesmodules over het onderwerp hadden studenten nog steeds moeilijkheden met het vak (Dorier, 2000).

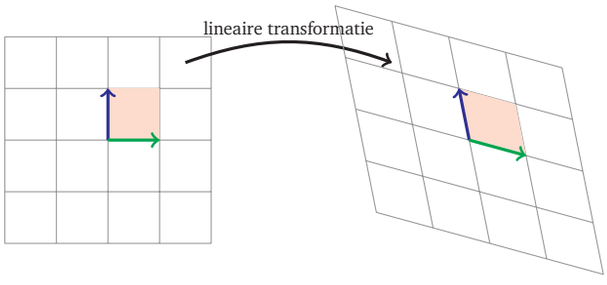
In de voorbije decennia werd effectief meer onderzoek verricht naar de typische problemen bij lineaire algebra, en één antwoord lijkt naar voren te komen: het coördineren van de verschillende 'werelden' van begrip bij vectorruimten stelt unieke uitdagingen die niet aanwezig zijn bij andere domeinen (Thomas & Stewart, 2011; Trigueros & Wawro, 2020). Met die verschillende werelden wordt bedoeld: de meetkundige (geometrische) wereld, de symbolische wereld en de formele wereld. Ieder concept van vectorruimten kan in al die werelden begrepen worden, maar de overgang gebeurt allerminst vanzelfsprekend. Het komt dan ook vaak voor dat een student vastloopt in één wereld, terwijl de rijkdom van vectorruimten net bestaat uit die verschillende werelden. Ook in het Vlaamse secundaire onderwijs is het wenselijk dat leerlingen niet vasthouden aan enkel de meetkundige betekenis, maar ook stappen naar de symbolische en de formele wereld zetten. We maken deze drie werelden concreet met enkele voorbeelden en eindigen met concrete adviezen over hoe je als leerkracht die werelden kunt coördineren in je lessen. Nuance is hier wel geboden: het hangt af van welke leerdoelen je voorop stelt. Als je vectorruimten invoert als puur abstracte algebraïsche structuur (zoals in paragraaf 2), speelt de meetkundige wereld een kleinere rol, wat normaal ook gereflecteerd wordt in een kleiner belang in de evaluaties.

4.1 De drie werelden

De eerste wereld is de meetkundige wereld. Daar bestudeert men vectoren als pijlen in een assenstelsel, en worden operaties zoals optellen en scalair vermenigvuldigen visueel voorgesteld. Vaak komt er een diagram aan te pas, en ook matrixtransformaties worden voorgesteld als meetkundige operaties op het volledige vlak of de ruimte. Je vindt in Figuur 5 een voorbeeld dat een lineaire transformatie visueel voorstelt.

Deze meetkundige wereld is vaak de eerste wereld die studenten leren kennen, omdat het visueel en intuïtief aanvoelt. Als je vectorruimten wilt bestuderen om te leren over een algebraïsche structuur, moet je echter ook de brug slaan naar de symbolische en formele wereld.

In de symbolische wereld worden vectoren en matrices voorgesteld met algebraïsche symbolen, vergelijkingen en rekenregels. Vectoren worden nu "$\vec{v}, \vec{w}$" in plaats van een tekening en matrices worden "A, B" in plaats van een visuele transformatie. De analytisch-meetkundige insteek, waarbij coördinaten toegekend worden aan iedere vector, zweeft ietwat op de grens tussen de meetkundige en symbolische wereld. Je gaat over van een specifieke tekening naar (1,4) en vervolgens naar $\vec{v}$.

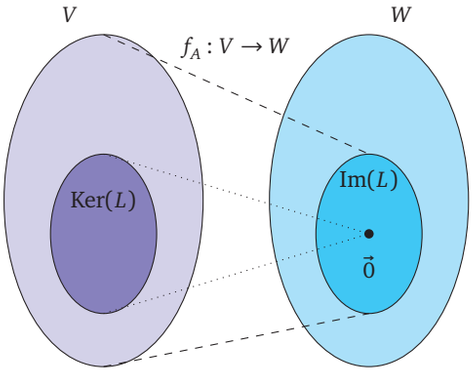


Figuur 5 *– Een visuele voorstelling van een lineaire transformatie van het vlak*

Het 'meetkundig rekenen' door meetkundige transformaties aaneen te schakelen wordt verder vertaald in algebraïsche rekenregels. Bijvoorbeeld het feit dat uitrekken met factor r en vervolgens uitrekken met factor s neerkomt op uitrekken met factor sr, wordt nu samengevat als $s(r\vec{v}) = (sr)\vec{v}$. Ook een lineaire transformatie van het vlak wordt nu een symbolische vermenigvuldiging van een matrix met een vector $A\vec{x} = \vec{b}$. Eerder dan een visuele voorstelling draait het nu om het zorgvuldig uitrekenen van het matrixproduct of het oplossen van de vergelijking. Algoritmes zoals rijreduceren passen ook perfect in deze wereld.

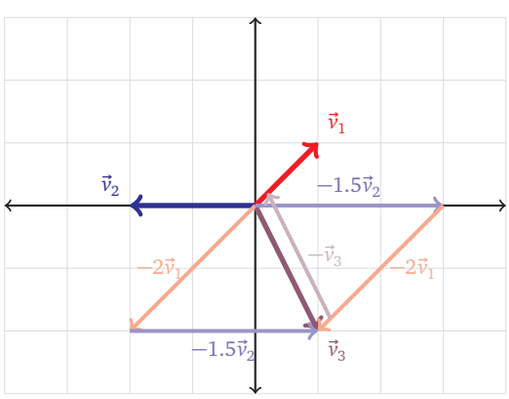
Een derde wereld is de formele wereld. Deze wereld heeft iets van een utopisch kantje, omdat hij moeilijk te bereiken is met leerlingen. In de formele wereld wordt er een wiskundig-abstract begrip gegeven aan vectoren, matrices enzovoort *zonder* noodzakelijkerwijs symbolen te gebruiken. In deze wereld worden vectoren begrepen als abstract wiskundige objecten die elementen zijn van een verzameling met 'lineaire' eigenschappen. Matrices zijn dan de natuurlijke functies tussen die verzamelingen. De symbolische matrixvermenigvuldiging $A\vec{x} = \vec{b}$ betekent nu dat de vector $\vec{x}$ onder de lineaire functie geassocieerd met A, genoteerd als f_A, afgebeeld wordt op $\vec{b}$. Het draait minder om het (symbolisch) uitrekenen van concrete waarden voor $\vec{b}$ noch $\vec{x}$, maar over het verband tussen de verschillende verzamelingen en functies. Worden lineair onafhankelijke vectoren afgebeeld op lineair onafhankelijke vectoren? Op verschillende

vectoren? Op de nulvector? En wat is het verband met de beeldverzameling van f_A? Dat zijn de relevante vragen in deze wereld. Een grenssituatie tussen de formele wereld en de andere twee is bijvoorbeeld het gebruik van een Venndiagram. Het abstracte, 'onvoorstelbare' object van een lineaire transformatie wordt dan symbolisch een pijl tussen twee ellipsen, en het redeneren over visuele regio's in de tekening is de meetkundige vertaling van onze eerdere formele vraag over welke vectoren op $\vec{0}$ afgebeeld worden.



De formele wereld blijft in principe afgescheiden van de symbolische wereld, al bestaat bijvoorbeeld bovenstaande grijze zone met de Venndiagrammen. Een leerling die met symbolen rekent en symbolische eigenschappen noteert, zoals in paragraaf 2 voorkomt, betekent echter niet dat die leerling zich in de formele wereld bevindt. Meer zelfs, eigenschappen of uitspraken in de formele wereld kun je vaak in Nederlands uitleggen, zonder veel symbolen.

We werken de verschillende werelden uit voor lineaire (on)afhankelijkheid als voorbeeld. Meetkundig gezien betekent lineaire afhankelijkheid dat je ten eerste een vector kunt maken uit de andere vectoren in de verzameling, en ten tweede dat er een ketting van vectoren bestaat die bij de nulvector uitkomt. We illustreren dit hieronder op een tekening van drie vectoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ en $\vec{v}_3$ in $\mathbb{R}^2$.



Deze drie vectoren zijn lineair afhankelijk, want je kan $\vec{v}_3$ maken als lineaire combinatie van $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ (linkse pijlketting), namelijk $\vec{v}_3 = -2\vec{v}_1 - 1.5\vec{v}_2$. Daarnaast is er ook een (gerelateerde) ketting van vectoren die bij de nulvector uitkomt (rechtse pijlketting): $-1.5\vec{v}_2 - 2\vec{v}_1 - \vec{v}_3 = \vec{0}$.

Symbolisch gezien betekent lineaire afhankelijkheid van een verzameling $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ dat de vergelijking $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_n\vec{v}_n = 0$ een niet-triviale oplossing heeft (waarbij minstens één c_i niet gelijk is aan 0). Een verzameling is dan lineair onafhankelijk, wanneer de vectoren niet afhankelijk zijn. Op zich betekent dit weinig meer dan een vreemde algebraïsche vergelijking met een al dan niet triviale oplossingenverzameling.

Vanuit het formele perspectief is een verzameling vectoren lineair afhankelijk wanneer er 'redundante' informatie in de verzameling zit. Je kunt een of meerdere vectoren weglaten om dezelfde voortgebrachte ruimte te behouden. Dat formele inzicht vormt dan ook een mogelijke inleiding om het concept 'basis' te introduceren; dat is precies een minimale verzameling vectoren (dus lineair onafhankelijk) die wel nog de hele ruimte V voortbrengt. Merk op dat hier geen symbolen aan te pas komen; dat is dan ook geen kenmerk van de formele wereld.

4.2 Didactische adviezen bij de drie werelden

Nu de drie verschillende werelden duidelijk zijn, kunnen we verdere didactische adviezen formuleren om die werelden te coördineren in de lessen. We raden het je vooreerst van harte aan om zelf eens een tabel te maken met op iedere rij een concept (lineaire onafhankelijkheid, basis, deelruimte, ...) en in iedere kolom de bijhorende voorstelling (in meetkundige, symbolische en formele wereld). Als de verbanden voor jezelf duidelijk zijn, kun je ook vlotter schakelen tussen de werelden in de les *en* je realiseren wanneer leerlingen vastzitten in één wereld. Het belangrijkste advies is om iedere overgang tussen de werelden expliciet te maken voor de leerlingen, en bij een nieuw concept interpretaties te voorzien van meerdere werelden. Spring dus niet zonder uitleg van een vectordiagram naar een vergelijking naar een formele definitie.



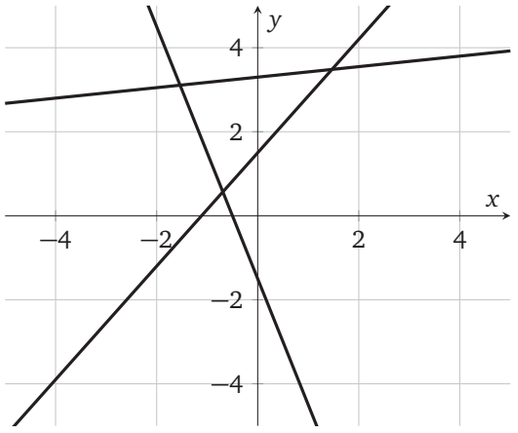
Je vraagt je mogelijks af in welke volgorde je best de drie werelden behandelt. Ga je best vanuit de meetkundige wereld naar de symbolische en dan naar de formele? Is een andere volgorde beter, of maakt het eigenlijk niet uit? Het grootste verschil tussen de verschillende aanpakken in deze loep slaat exact op die verschillende volgorde. Paragraaf 1 startte vanuit de formele wereld, want de focus lag op (deel)verzamelingen en hun operaties, met weliswaar veel concrete voorbeelden al van in het begin. De meetkundige en symbolische wereld komen er minder aan bod; meer zelfs, het argument is net dat leerlingen niet mogen blijven hangen in de meetkundige "pijlenvoorstelling". Paragraaf 2 startte vanuit de symbolisch(-formele) wereld, met tegelijkertijd een nadruk op formele eigenschappen verklaard in het Nederlands en met veel puur-symbolische bewijzen. Naar het einde toe worden dan nog concrete vectorruimten, zoals $\mathbb{R}^n$, verbonden aan de formeel-symbolische theorie. Paragraaf 3 stelde enkele instapactiviteiten voor die meestal vanuit de meetkundige wereld beginnen, en dan toewerken naar de formele wereld. Dit overkoepelend kader kan u helpen kiezen tussen de verschillende aanpakken, volgens wat het beste aansluit bij uw klascontext en het specifieke concept. In een Amerikaans experiment met 70 studenten waar systematisch de volgorde van de drie werelden gewisseld werd, besloot men alleszins

> *We merkten dat de attitude [van studenten] tegenover de leerstof veel positiever was, wanneer de concepten eerst werden aangeboden vanuit de meetkundige of symbolische wereld. Zodra leerlingen echter met alle drie de werelden voor een concept [vectorruimte, lineaire onafhankelijkheid, ...] kennisgemaakt hadden, leek er weinig verschil te zijn in het bereikte begripsniveau.*
>
> *— (Hannah e.a., 2014), vertaald*

We bespraken al de volgorde van de drie werelden, alsook de algemene tip om overgangen tussen de drie werelden expliciet te benadrukken. Je kunt ook specifieke taken gebruiken om het wisselen van werelden in te oefenen. Dat kan heel eenvoudig: op het einde van een oefening vraag je de leerlingen om hun oplossingsmethode te vertalen naar een andere wereld. Daar heb je quasi geen extra voorbereidingswerk aan. Als je matrices laat rijreduceren (symbolisch rekenwerk), vraag je bijvoorbeeld wat dat betekent voor de voortgebrachte ruimte van de rijen (formele wereld) en hoe je het resultaat ook al meetkundig had kunnen

zien aankomen. Een iets grotere transitietaak kan bijvoorbeeld een oefening zijn waarin meerdere werelden tegelijk aan bod komen. In de opgave in Figuur 6 wordt op het eerste gezicht een strikvraag gesteld, toch voor wie de drie werelden niet goed coördineert. Zou jij er ook intrappen?

Naast zulke strikvragen kun je ook meer impliciete transitietaken geven, waarbij de opgave geformuleerd is in één wereld (meetkundige, symbolische of formele) en waarbij je verwacht dat de oplossingsmethode in een andere wereld zal gebeuren. We tonen in Tabel 2 enkele opgaves ter inspiratie, een volledigere overzicht werd gemaakt door Stewart (2018).



***Figuur 6** – Hoeveel oplossingen heeft het lineaire stelsel dat hier weergegeven is? Overgenomen uit (Oktaç, 2018)*

Oplossen met	Opgave in meetkundige wereld	Opgave in symbolische wereld	Opgave in formele wereld
Meetkundige wereld	Is de vectorruimte $\mathbb{R}^2$ een deelruimte van $\mathbb{R}^3$? Verklaar je antwoord met een tekening.	Wat berekent de formule $\|u\|\,v + \|v\|\,u$ meetkundig gezien voor vectoren v en u in $\mathbb{R}^2$?	Het is gegeven dat de voortgebrachte ruimte van $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$ dezelfde is als die van $\{\vec{v}_1\}$. Wat betekent dit meetkundig? Wat als ook $\text{span}\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ hetzelfde is?
Symbolische wereld	Je krijgt twee vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ [in een bij te voegen diagram]. Bereken de coördinaten van een vector op de bissectrice.	Hoe groot kan de oplossingsverzameling van onderstaand stelsel zijn (afhankelijk van a)? $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + \left(a^2 - 8\right) y = a \end{cases}$	Toon symbolisch aan dat scalair vermenigvuldigen van een vector met factor -1 de inverse vector voor de optelling geeft. [Gebruik deze nog toe te voegen lijst van symbolische axioma's]
Formele wereld	Stel dat je twee gegeven vlakken hebt in $\mathbb{R}^3$. Hoe kan je dan in de taal van de vectorruimten hun doorsnede beschrijven?	Verklaar de grootte van de dimensie van $\text{Span}\{(a-1,a+3),(a+3,a-1)\}$ voor een gegeven a-waarde? Wat met de dimensie van $\text{Span}\{(a_1-1,a_1+3),(a_2+3,a_2-1)\}$ voor gegeven a_1- en a_2-waardes?	Verklaar in woorden waarom $\mathbb{R}^{2\times 2}$ isomorf is met $\mathbb{R}^4$.

***Tabel 2** – Verschillende opgaves die in één wereld starten en in een andere eindigen.*

Conclusie

In deze loep presenteerden we verschillende didactische insteken om vectorruimten te introduceren. Die verschillen reflecteren ook in de verschillende contexten waar ze geschikt kunnen zijn: een hele cursus voor de 6 uurs, een abstracte insteek voor de 8 uurs, of open problemen als huistaak voor beide. Met deze loep gaven we alvast een verbreding ten opzichte van de typisch axiomatische aanpak in de handboeken. We hopen dat je hieruit de nodige inspiratie kan putten om zelf creatief met het leerdoel over algebraïsche structuren bezig te zijn. Bovendien beschik je nu over een vakdidactisch perspectief op de gekende problemen bij vectorruimten vanuit de “drie werelden”, wat ook blikverbredend kan werken voor andere lesonderwerpen.

Bronnen

Andrews, W. S. (1917). *Magic Squares and Cubes*. Open Court Publishing Company.

De Naeghel, K., Gheysens, L., Tytgat, P., & Vanlommel, E. (2024). Algebraïsche structuur: de vectorruimte $R,R^n,+$ [Geraadpleegd op 2025-12-04]. https://wiskundeplan.be/lesmateriaal/

Dorier, J.-L. (2000). *On the Teaching of Linear Algebra* (Deel 23). Springer Science & Business Media.

Hannah, J., Stewart, S., & Thomas, M. (2014). Teaching Linear Algebra in the Embodied, Symbolic and Formal Worlds of Mathematical Thinking: Is There a Preferred Order?. *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Lay, D. C. (2016). *Linear Algebra and Its Applications* (5de ed.). Pearson.

Oktaç, A. (2018). Conceptions About System of Linear Equations and Solution. In S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman & M. Zandieh (Red.), *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra* (pp. 71–101). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66811-6_4

Sanderson, G. (2016). Essence of Linear Algebra [Geraadpleegd op 2025-12-04]. https://www.youtube.com/playlist?list=PLZHQObOWTQDPD3MizzM2xVFitgF8hE_ab

Stewart, S. (2018). Moving Between the Embodied, Symbolic and Formal Worlds of Mathematical Thinking with Specific Linear Algebra Tasks. In S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman & M. Zandieh (Red.), *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra* (pp. 51–67). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66811-6_3

Stewart, S., Andrews-Larson, C., & Zandieh, M. (2019). Linear algebra teaching and learning: Themes from recent research and evolving research priorities. *ZDM*, *51*(7), 1017–1030. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01104-1

Thomas, M. O. J., & Stewart, S. (2011). Eigenvalues and eigenvectors: Embodied, symbolic and formal thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *23*(3), 275–296. https://doi.org/10.1007/s13394-011-0016-1

Trigueros, M., & Wawro, M. (2020). Linear Algebra Teaching and Learning. In *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 474–478). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100021

van Luijk, R. (2024). Linear Algebra I [Geraadpleegd op 2025-12-11]. https://pub.math.leidenuniv.nl/~luijkrmvan/ps/LinearAlgebra1.pdf

Vanlommel, E., & Roelens, M. (2024). Groepen in de derde graad [Geraadpleegd op 2025-12-04]. *Uitwiskeling*, *38*(4), 14–54. https://www.uitwiskeling.be/artikel/groepen-in-de-derde-graad

Wawro, M., Zandieh, M., Rasmussen, C., & Andrews-Larson, C. (2013). Inquiry Oriented Linear Algebra: Course Materials. https://iola.math.vt.edu

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

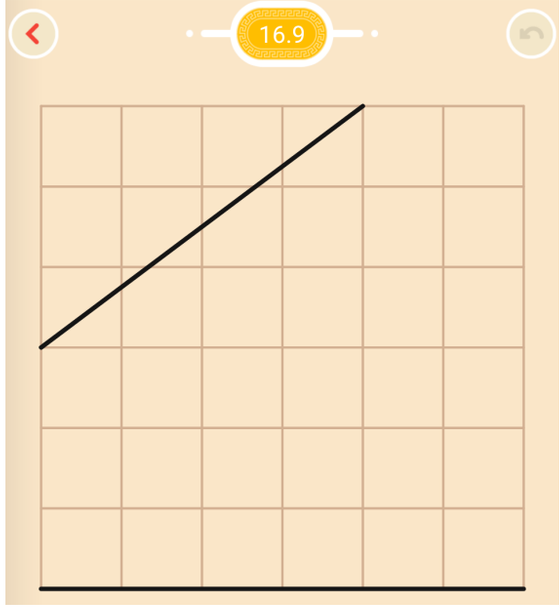
Pythagorea (app)

Horis International Limited



Een opgave in een beperkt rooster

Soms heb je geen moeilijk concept nodig om een interessante app te maken. De app Pythagorea is daar geen uitzondering op. Deze app bevat enkele honderden meetkundige problemen over klassieke onderwerpen zoals (uiteraard) de stelling van Pythagoras , maar ook zwaartepunten, bissectrices, loodlijnen, . . . In tegenstelling tot wat je echter gewoon bent binnen meetkunde, kun je niets meten. Je kunt enkel constructies met liniaal uitvoeren in een (klein) raster dat door roosterlijnen in 36 kleine vierkantjes is verdeeld. Bij de start van een opgave kun je enkel de gegeven roosterpunten verbinden via rechten. De nieuw bekomen snijpunten van zo een rechte met roosterlijnen of andere reeds getekende rechten kun je gebruiken om verdere constructies te maken tot je het gevraagde kunt construeren.

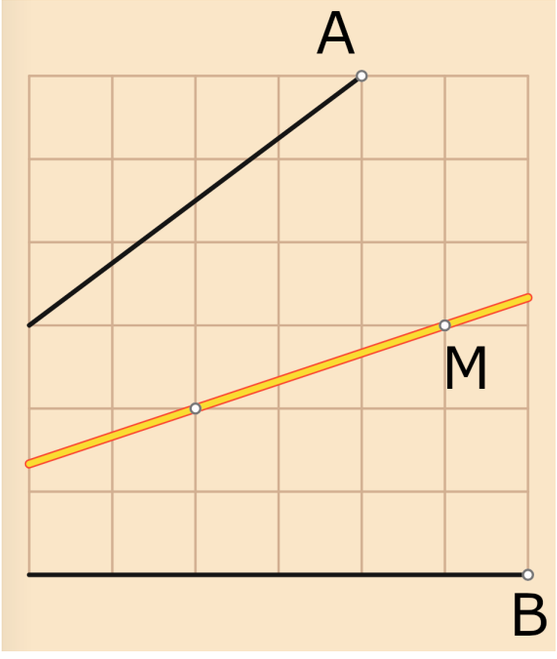


In de app staan de opgaven gesorteerd per thema. Binnen elk thema loopt de moeilijkheidsgraad op. De eerste opgaven zijn opwarmers, maar bij de latere opgaven dwingt het ontbreken van passer of de optie om lengtes of hoeken te meten, je geregeld om out-of-the-box te denken, soms zelfs letterlijk. Hoe zou je bijvoorbeeld in de onderstaande opgave de bissectrice tekenen van de hoek waarvan het hoekpunt buiten je scherm ligt?

De klassieke aanpak zou een constructie zijn met passer, maar die heb je hier niet. Ook het meten van de hoek is niet mogelijk. De hoekgrootte is trouwens 36°52′8”, dus een hoek construeren die exact half zo groot is, is moeilijk met een geodriehoek. We moeten hier een constructie bedenken (en de geldigheid ervan verklaren) die enkel gebruikt maakt van de roosterpunten of hulpconstructies hierop. (Spoiler: de oplossing staat op de volgende bladzijde.)

Een (onverwachte) oplossing.

De sleutel tot de oplossing van het bovenstaande probleem is een combinatie van de stelling van Pythagoras en gelijkbenige driehoeken. Door de getekende lijnstukken (in gedachten) te verlengen, zien we dat het hoekpunt zich vier roostervakjes links van het getekende rooster bevindt. Als we het hoekpunt P noemen en A en B de punten zijn zoals op de onderstaande tekening, dan is $|AP| = |BP| = 10$. In deze gelijkbenige driehoek is de gevraagde bissectrice ook de zwaartelijn uit de top P.

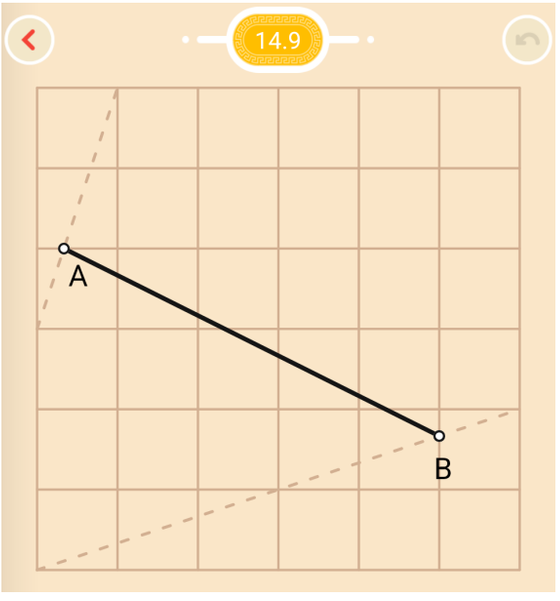


We moeten dus het midden M van lijnstuk $[AB]$ verbinden met P. Gezien M negen vakjes rechts en drie vakjes hoger dan P ligt, stijgt deze rechte een vakje per drie vakjes naar rechts. En het is exact dat laatste dat we met de roosterpunten kunnen construeren. Als alternatief had je ook de loodrechte stand van PM op AB of zelfs de verdubbelingsformule voor de tangens kunnen gebruiken om de hellingsgraad van de gezochte bissectrice te vinden.

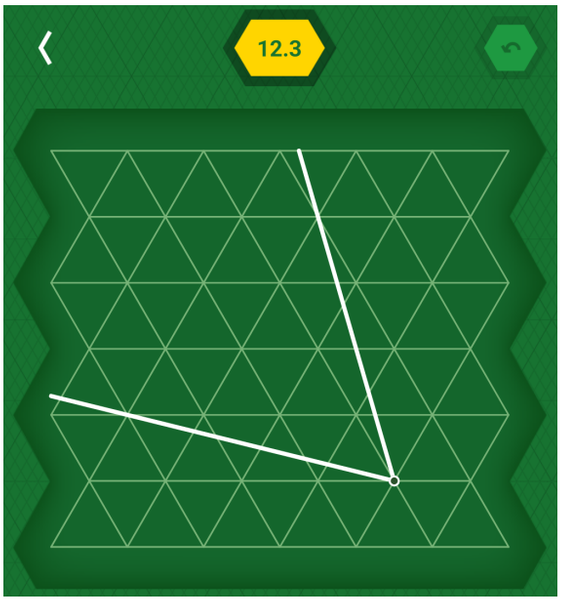
En nu verder zoeken ...

Misschien wil je nu zelf aan de slag, daarom geef ik graag nog enkele van mijn favorieten mee.

Hoe kun je het midden construeren van het onderstaande getekende lijnstuk?



Werk je liever in niet-vierkante roosters, dan is de app '*Pythagorea 60*' iets voor jou. Hieronder zie je een opgave waarbij je een bissectrice moet tekenen in die app.



Veel zoekplezier!

Dennis Presotto

29 april 2026 - WiskundeConnect
Een studiedag voor leraren wiskunde

Platform Wiskunde Vlaanderen, Vlaamse Vereniging WiskundeLeraars, Centrum Nascholing Onderwijs (UAntwerpen)

Op woensdag 29 april 2026 organiseren Platform Wiskunde Vlaanderen, Vlaamse Vereniging WiskundeLeraars en Centrum Nascholing Onderwijs samen voor het eerst WiskundeConnect, een studie- en ontmoetingsdag voor leraren wiskunde van het secundair onderwijs uit alle jaren, richtingen en finaliteiten.

Deze studiedag gaat door in het Belpairegebouw in Brussel, vlakbij station Brussel-Noord. Vlot bereikbaar met het openbaar vervoer dus.

Programma

- 9.00u-9.30u: onthaal
- 9.30u-11.00u: plenaire lezing
- 11.15u-12.30u: keuzeworkshop 1
- 12.30u-13.30u: broodjeslunch met leermiddelenbeurs
- 13.30u-14.45u: keuzeworkshop 2
- 15.00-16.15u: keuzeworkshop 3

De plenaire lezing gaat over de Vlaamse toetsen (binnenkort ook in het zesde jaar!) en hoe de vakgroep concreet aan het werk kan met de resultaten van hun leerlingen.

De topics die in de keuzeworkshops aan bod komen, zijn breed: problem solving, het gebruik van AI in de wiskundeles, game based learning, wiskunde bij het ontwerpen van computergames, effectieve didactiek met GeoGebra…

Noteer alvast 29 april 2026 in je agenda!

Meer info vind je onder andere via de websites van de verschillende organisatoren:
https://platformwiskunde.be/
https://www.vvwl.be/
https://cno.uantwerpen.be/

EMS Lecture Series on Mathematics Education

Vanaf 9 januari 2026 t.e.m. 12 juni 2026, elke tweede vrijdag van de maand om 19u

De European Mathematical Society, met als voorzitter Prof. Dr. Ann Dooms (VUB), organiseert van 9 januari 2026 tot en met 12 juni 2026 elke tweede vrijdag van de maand om 19u een webinar over wiskundeonderwijs.

Deze reeks richt zich tot

- wiskundeleraren,
- lerarenopleiders en onderwijsonderzoekers,
- wiskundigen in het hoger onderwijs en onderzoek,
- curriclumontwikkelaars, onderwijsautoriteiten en beleidsmakers.

Toonaangevende experts verkennen in de lezingenreeks kritische kwesties en innovaties in wiskundeonderwijs, curriculumontwikkeling en beleidsvorming. De webinars worden gemodereerd door niemand minder dan Dr. Tom Crawford. Ook de sprekers zijn stuk voor stuk toppers in hun domein!

De lezingen zijn in het Engels.
Meer info: https://euromathsoc.org/news/ems-lecture-series-on-mathematics-education-190

Programma

- **9 januari** Anna Stokke
  Waarom fundamentele wiskundige vaardigheden belangrijk zijn en hoe deze te verbeteren
- **13 februari** Nuno Crato en Tim Surma
  Het leren van wiskunde verbeteren met principes van menselijke cognitie
- **13 maart** Hung-Hsi Wu
  Wat is schoolwiskunde? Een kritische blik op de samenhang van schoolwiskunde en hoe leraren uit te rusten met de wiskundige kennis om te slagen
- **10 april** Sarah Powell
  Ondersteuning van leerlingen die problemen ondervinden met het leren van wiskunde
- **8 mei** Filip Moons
  “e staat voor eenden”: variabelen onderwijzen op een weg bezaaid met misvattingen
- **12 juni** Terence Tao
  Hoe moeten studenten hun AI-dieet beheersen?

Inhoudsopgave

Redactioneel 1

De functie van Uitwiskeling 1

Spinnenweb 4

Goochelen en wiskunde: rekenen met letters 4

GeoMath 7

Een onverwachte link tussen driehoeken en tweedegraadsfuncties 11

Een hotelcake horizontaal halveren 18

Drie jonge wiskundigen tackelen oude, onopgeloste problemen van Paul Erdős (3) 22

Onder de loep 25

Vectorruimten 25

Bibwijzer 53

Pythagorea (app) 53

Actualiteit 55

29 april 2026 - WiskundeConnect 55

EMS Lecture Series on Mathematics Education 56

Overzicht paginanummers voor de manuele inhoudsopgave op de omslag - zet in comment vóór maken van de finale PDF!

moet veelvoud van 8 zijn (bij printversion true, zonder deze in-