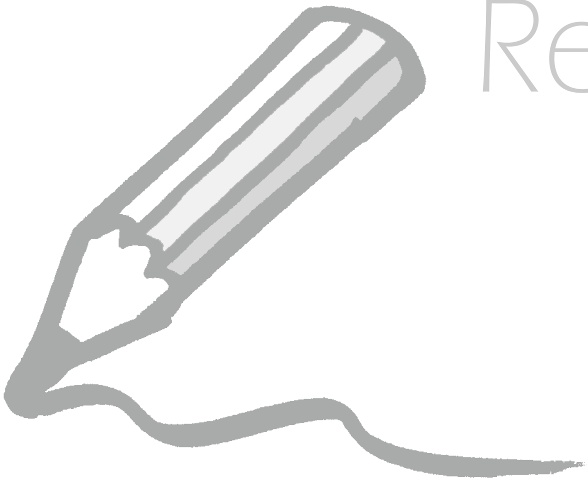


Redactioneel

Je zult het al wel gemerkt hebben, beste lezer, STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics) is een hot topic in ons onderwijs. De Vlaamse Regering heeft een actieplan uitgewerkt waarmee ze poogt jongeren warm te maken voor wetenschappen en techniek. Want Vlaanderen kampt met een structureel tekort aan afgestudeerden in de STEM-richtingen. En dat is niet alleen economisch een probleem. De samenleving van vandaag heeft mensen nodig die de uitdagingen kunnen aangaan op het vlak van energie, milieu, mobiliteit, vergrijzing, gezondheidszorg, voeding…

In veel scholen werkt men dus allerhande STEM-projecten uit of wordt aan de lessentabellen gesleuteld om tegemoet te komen aan de (regionale) noden. Ik vind dat een goede zaak. Onderwijs kan niet losstaan van maatschappelijke evoluties. Als wiskundige vind ik het bovendien prachtig dat mijn vak op deze manier in de aandacht komt en wil ik hier graag aan meewerken.

Tegelijk zie ik een aantal valkuilen. We moeten er over waken dat we onze leerlingen een correct beeld geven van de STEM-richtingen. Hoe kunnen we jongeren de relevantie van STEM voor hun leven laten zien zonder dat ze een vertekend beeld krijgen van de STEM-vakken? Het risico bestaat dat ze kiezen voor het spektakel: ze doen al in de lagere school spectaculaire proefjes, maken hun eigen haargel, laten lampjes branden door te fietsen… Vaak zonder dat ze een verklaring kunnen geven voor wat ze waarnemen of doen. De verschillende disciplines moeten doordacht op mekaar afgestemd worden. Als de wiskunde-instrumenten nog niet gekend zijn om verklaringen te geven van de waargenomen fenomenen, vind ik het niet altijd zinvol om die fenomenen al te bestuderen. Het risico bestaat immers dat het oppervlakkige ‘spielerei’ wordt.

De interpretatie die vaak gegeven wordt aan het STEM-verhaal is er één van geïntegreerd werken. Wiskunde wordt in die visie herleid tot een soort van instrumentarium. Wiskunde dient de wetenschappen en op hun beurt worden wetenschappen ingezet in functie van de techniek en de technologie. Ik vind dat we deze operationele visie op wiskunde (en wetenschappen) niet te ver mogen doortrekken. Uiteraard is de toepasbaarheid in andere disciplines een belangrijk aspect van wiskunde. En uiteraard is het nodig dat we samenwerken met andere vakken om jongeren te inspireren en motiveren. Dat gebeurt trouwens al in het wiskundeonderwijs van vandaag. Maar we moeten erover waken dat de algemene wiskunde-vorming, met zijn krachtige en mooie redeneringen los van de toepassingen, niet in het gedrang komt. Wiskunde is immers zoveel meer dan de toepassingen alleen. Ik denk bijvoorbeeld aan redeneervaardigheden. Wetenschappers kunnen wel technologische oplossingen aanreiken, maar het is de hele maatschappij die moet beslissen of en hoe we die technologie zullen gebruiken. Redeneervaardigheden zijn hierbij essentieel. En waar kun je die beter trainen dan in wiskunde? Wiskunde herleiden tot de toepasbaarheid ervan in andere disciplines en het vak wiskunde opofferen ten koste van die toepassingen zou een grote verarming betekenen. Ongetwijfeld voer voor interessante discussies op school!

Hopelijk draagt het lezen van deze nieuwe Uitwiskeling er toe bij dat je een beetje van je passie overzet op je leerlingen zodat zij goed gemotiveerd voor STEM kunnen kiezen.

Els Vanlommel, namens de redactie

Spinnenweb

Actieve werkvormen in een wiskundeles: drie bescheiden voorbeeldjes

Gerd Hautekiet

Time's Up

Eerste les begin september.

Ik ben titularis van een klas waar ik wiskunde geef. Na de gebruikelijke kennismakings-activiteiten en administratieve geplogenheden, had ik op 1 september nog wat tijd over om alvast mijn leerlingen in wiskundestemming te brengen na een lange vakantie zonder.

Ik probeerde een aangepaste versie van het spelletje Time's Up uit. De originele en uitgebreide spelregels zijn te vinden op het internet (zie bv. Vzw Vlaams Spellenarchief). Het spel wordt in drie rondes gespeeld in verschillende teams. Ik had een voorraad kaartjes bij met wiskundige begrippen: driehoek, Pythagoras, kwadratische functie, discriminant, richtingscoëfficiënt, coördinaten, grafiek, parabool, rechte… Verder deed een gsm van een van de leerlingen dienst als zandloper, een maatbeker uit de fysicaklas werd gebruikt als pot. Alle kaartjes gingen opgeplooid in de pot. Ik speelde met 5 teams. De spelregels: elk team speelt om de beurt, de verschillende leden van het team zijn om de beurt verteller, uitbeelder of rader. Tijdens de eerste ronde neemt de verteller één voor één kaartjes uit de pot, hij praat vrijuit over het onderwerp op het kaartje zonder dat begrip, delen ervan, vertalingen of verkleinwoorden van dit begrip te vernoemen. Het team moet proberen zoveel mogelijk begrippen te raden in 30 seconden. Ze mogen onbeperkt raden. Er mag niet gepast worden. Maakt de verteller een fout tegen de spelregels of kunnen zijn teamleden het begrip niet raden, gaat de beurt naar het volgende team. De geraden kaartjes blijven tijdens deze ronde voor het team, de rest gaat terug in de pot. Op het einde van de ronde, als alles geraden is, worden de kaartjes per team geteld. De tweede ronde is de uitbeeldronde: dezelfde kaartjes moeten deze keer uitgebeeld worden, zonder te praten, weer telkens gedurende 30 seconden. Aangezien de kaartjes dezelfde zijn, speelt hier het geheugen een helpende rol. In de derde en laatste ronde moeten weer dezelfde kaartjes geraden worden, deze keer door ze te omschrijven in één enkel woord. Bij de twee laatste rondes kun je afspreken dat er maar een keer geraden mag worden; als het antwoord fout is, gaat het kaartje opnieuw in de pot.

Ik heb de leerlingen tijdens het spel goed kunnen observeren en heb alvast gezien wie zelfzeker was of eerder faalangst had. De leidersfiguren traden naar voren bij de groepsindeling, het praktisch organiseren… Het was voor mij verbijsterend te zien hoe moeilijk leerlingen zelfs basisbegrippen kunnen omschrijven. De leerlingen vonden het een zeer leuke activiteit en spelenderwijs heb ik gezien dat tijdens een vakantie veel basiskennis naar de achtergrond verdwijnt… Mooi meegenomen dat ik op de eerste schooldag al aan vakgebonden eindtermen aan het werken was: de leerlingen begrijpen en gebruiken wiskundetaal; de leerlingen zijn gericht op samenwerken om de eigen mogelijkheden te vergroten.

Nog eens kaartjes

In het vijfde jaar probeer ik bij mijn lessen over het asymptotisch gedrag van functies de leerlingen eerst heel intuïtief het verschil tussen een horizontale en een verticale asymptoot bij te brengen alvorens over te gaan op de limietnotatie.

Ik hecht veel belang aan het juiste gebruik van het zinnetje: als $x \to a$ dan $f(x) \to \pm\infty$ bij een verticale asymptoot of als $x \to \pm\infty$ dan $f(x) \to a$ bij een horizontale asymptoot. De leerlingen moeten deze zinnetjes kunnen linken aan grafieken en moeten de betekenis kunnen verduidelijken met een tabelletje.

Ik had ongeveer een volledige les aan dit item besteed en zou na het weekend met dit onderwerp verder gaan. Ik had de leerlingen heel nadrukkelijk gevraagd om tegen volgende les zeker de voorbije les nog eens na te kijken. 'Is het dan toets, mevrouw?' Alhoewel ik dat niet van plan was, zei ik, 'dat zul je dan wel zien.' Ik maakte allerlei kaartjes met de volgende uitdrukkingen erop: $x = a$, $x = b$, a, b, $\pm\infty$, geen asymptoot…

De volgende les heb ik elke leerling twee kaartjes gegeven en gaf aan bord opgaven in de vorm van:

De grafiek van f heeft een verticale asymptoot met als vergelijking $x = b$. Vul aan : als $x \to \cdots$ dan $f(x) \to \cdots$

Telkens er drie puntjes verschenen op bord moesten er kaartjes omhoog gestoken worden.

Ofwel tekende ik een grafiek op bord met een asymptoot.

Vul aan : als $x \to \cdots$ dan $f(x) \to \cdots$

Het was de bedoeling dat ze het juiste kaartje omhoog staken als het van toepassing was. Sommige leerlingen waren zeer onzeker, ze moesten zeer alert zijn. Sommigen staken een verkeerd kaartje naar boven, anderen geen kaartje terwijl ze er toch één hadden dat van toepassing was.

Voordeel: iedereen was actief. Alle leerlingen moesten mee nadenken en op zeer korte tijd had ik en hadden ook de leerlingen zelf gezien wie mee was en wie nog niet mee was. Dit was geen echte evaluatie, het was ook niet voor punten maar ik heb toch iets gedaan zonder dat ik een toets moest verbeteren.

In een andere klas heb ik dezelfde kaartjes gebruikt. Ik had de kaartjes gemaakt van mini-affiches die ik verknipte. Deze leerlingen hebben zich enkel geconcentreerd op de achterkant van mijn kaartjes en wilden de puzzel terug volledig maken… Doel volledig gemist…

Leerlingen als oefeningenbedenkers

Een les over veeltermfuncties. Geef het voorschrift van een veeltermfunctie van de derde graad met 4, 2 en -1 als nulpunt. Er volgden nog enkele voorbeelden met enkelvoudige nulpunten en dubbelnulpunten. In plaats van de oefeningen uit het handboek te gebruiken, liet ik de leerlingen een uitdagende opgave maken voor hun buur. De buur moest die opgave dan oplossen.

Voordeel: alle leerlingen waren gemotiveerder en actiever. Er waren ook enkele onmogelijke opgaven bij, wat dan weer een geanimeerd gesprek onder de leerlingen als gevolg had. Wiskunde en taal in de praktijk.

Met deze drie kleine voorbeeldjes wil ik laten zien dat een heel kleine ingreep kan zorgen voor variatie en meer betrokkenheid van de leerlingen. Maar wat in de ene klas lukt, mislukt soms in een andere groep. Gewoon proberen. Deze werkvormen zijn zeker ook in andere jaren en bij andere lesonderwerpen te gebruiken. Heb je zelf ook voorbeeldjes, wiskel ze uit met ons!

Bronnen

vzw Vlaams Spellenarchief, geraadpleegd 11.11.2014, http://spelarch.khbo.be/PDFspelregels/6026.pdf

Een activerende les over ruimtefiguren in het vierde jaar

Nena Bemindt

In een niet-wiskundige richting in het aso zijn leerlingen vaak geholpen met een praktische toepassing of vraagstuk op de te verwerken leerstof. Het helpt hen de leerstof te plaatsen in een breder kader en beantwoordt impliciet de populaire vraag 'waarom?'. In deze context heb ik in een les ruimtemeetkunde een duotaak gegeven rond oppervlakte en inhoud van ruimtefiguren. Ruimtemeetkunde leent zich misschien nog het meest tot een doe-opdracht en de mogelijkheden zijn eindeloos. In dit artikeltje laat ik deze opdrachten zien en doe ik verslag van mijn ervaringen in drie klassen van het vierde jaar.

De leerlingen begonnen bij deze les per twee met een opdracht. Er waren vier verschillende opdrachten en niet alle leerlingen begonnen met dezelfde opdracht. Om de vragen te kunnen beantwoorden, moesten ze de inhoud en/of oppervlakte van een of meerdere ruimtefiguren berekenen. Ze kregen de figuur daadwerkelijk in handen en kregen dus geen gegevens. Wanneer ze hiermee klaar waren, gaven ze het antwoordenblad af en kregen ze een nieuwe opdracht. Hieronder vind je de opdrachten die ik hiervoor ontworpen heb.

begin lesactiviteit

Volume en oppervlakte van je huis

Bereken de oppervlakte en het volume van je huis (kies zelf van wie van beiden). Waarschijnlijk ken je niet alle afmetingen van je huis precies. Maak dan een goede schatting. Ben je snel klaar, dan kun je de opdracht herhalen voor het huis van de andere leerling.

1. Je huis zal uit één of meerdere ruimtefiguren bestaan: het dak kan een prisma of een piramide zijn, er kan een balkvormige aanbouw zijn achteraan… Maak eerst een duidelijke schets van je huis op schaal.
2. Wat is de totale oppervlakte van je huis?
3. Wat is het volume (de inhoud) ervan?

einde lesactiviteit

begin lesactiviteit

Siroop in een conservenblik

In het conservenblik dat je bij deze opgave gekregen hebt, zitten 14 halve perziken, aangelengd met siroopwater. We benaderen de vorm van de perziken door halve bollen met een straal van 2,5 cm. De uitsparing waar de pit zat, is eveneens een halve bol, met een straal van 1 cm.

Bereken hoeveel dl siroopwater er voor dit conservenblik gebruikt werd.

Tip: bereken eerst de inhoud van het blik. Bereken daarna het volume (de inhoud) van de 14 halve perziken, zonder pit. Hoeveel ruimte blijft er nog over?

Eenheden:

- 1 liter = 1 dm^3 = 1000 cm^3 = 1 000 000 mm^3
- 1 dl = 0,1 dm^3 = 100 cm^3 = 100 000 mm^3

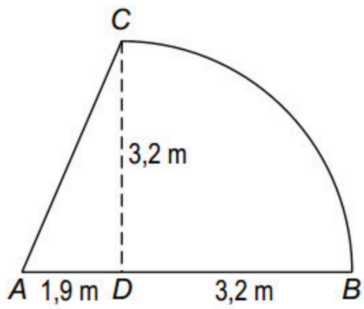
einde lesactiviteit

begin lesactiviteit

Overkapping van een zwembad

Erik wil een overkapping laten plaatsen boven zijn zwembad. Deze overkapping is gemaakt van doorzichtige kunststof. Hij wil weten hoeveel kunststof er gebruikt zal worden voor deze constructie.

Op de foto staat een stuk van de overkapping. Naast de foto is een schets gemaakt van de voorkant, met de maten in meter. Op je bank krijg je een maquette van de constructie. De voorkant bestaat uit een rechthoekige driehoek ADC en een kwartcirkel. De achterkant heeft uiteraard dezelfde vorm.



1. Bereken eerst in m^2 de oppervlakte van de voor- en achterkant van deze overkapping. Schrijf je berekening op en rond af op twee decimalen.

Om de hoeveelheid kunststof te kunnen berekenen die nodig is voor het dak dat de voor- en achterkant verbindt, moet Erik eerst de lengte van AC en de lengte van boog CB kennen. De overkapping is 10,52 m lang. Erik besluit dat er in totaal 114 m^2 kunststof nodig is.

2. Reken na.

einde lesactiviteit

begin lesactiviteit

Wijnfles

Je krijgt een wijnfles voor je. Als je deze fles zou vullen tot de rand, hoeveel liter water heb je dan nodig? Voer zelf de nodige metingen uit. Bereken eerst de totale inhoud van de fles (som van alle deelfiguren) en zet dan om in liter. Vergeet ook de uitsparing onderaan niet!

De inhoud van een kegel is $\frac{\pi . r^2 . h}{3}$, met r de straal van het grondvlak en h de hoogte van de kegel.

Eenheden:

- 1 liter = 1 dm^3 = 1000 cm^3 = 1 000 000 mm^3
- 1 dl = 0,1 dm^3 = 100 cm^3 = 100 000 mm^3

einde lesactiviteit

Mijn ervaring is dat de leerlingen zich de problemen goed kunnen voorstellen en dat de fysieke voorwerpen een herkenningspunt voor de leerlingen vormen. Bij de opdracht over de overkapping van het zwembad had ik de overkapping aanvankelijk alleen beschreven en op een vlakke figuur aangegeven. De leerlingen hadden heel wat moeite om zich deze overkapping voor te stellen. Voor de volgende lessen heb ik de opdracht herwerkt en een schaalmodel gemaakt. Dat werkte veel beter.

De les die ik hier voorstel, kan een afwisseling vormen met de stereotiepe les wiskunde omdat de opdracht zich niet louter op papier afspeelt. In de vraagstukken zitten heel wat elementen verwerkt, zoals het rekenen met ruimtefiguren en het omzetten van kubieke centimeter naar liter.

Omdat de leerlingen bij sommige opgaven zelf hun gegevens verzamelden, liepen de resultaten sowieso wat uit elkaar. Het is uiteraard wel de bedoeling dat de leerlingen zo nauwkeurig mogelijk werken. De meesten hadden zelf de reflex om de gegevens op het etiket te vergelijken met hun eigen uitkomsten. Ik had duidelijk aan de leerlingen gezegd dat ze gequoteerd zouden worden op de gebruikte oplossingsmethode en de uitwerking ervan. De evaluatie had dus veel meer betrekking op het proces dan het eindresultaat.

Wat de leerlingen uit hun comfortzone haalde, was het gebrek aan gegevens in sommige opdrachten. Ze moesten de afmetingen zelf bepalen en de figuur benaderen met een samenstelling van (delen van) gekende ruimtefiguren. De uitsparing onderaan een wijnfles lijkt bijvoorbeeld erg op een kegel maar heeft wel een afgeknotte top. “Dan is mijn uitkomst toch niet juist, mevrouw?” was een vraag die daarbij meteen aan bod kwam. Leerlingen leerden hier dat een uitkomst een benaderende waarde kan zijn waarbij we rekening houden met een kleine foutenmarge. We gebruikten in deze les dus theoretische wiskunde om een praktisch vraagstuk op te lossen.

Omdat de opdrachten sterk verschilden van wat ze gewoon zijn in de lessen, reageerden de leerlingen in mijn eerste klas erg onwennig. Hieruit heb ik geleerd dat een goede introductie erg belangrijk is. Daarin werd de evaluatiemethode duidelijk uitgelegd en werd ook ingegaan op de verschillen met de standaardoefeningen uit de lessen wiskunde.

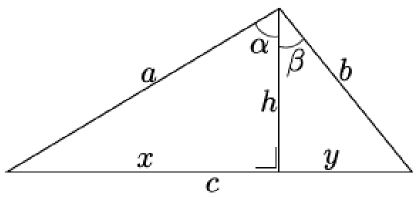
De les bleek ideaal om de leerlingen actief aan het werk te zetten. De meesten onder hen maakten zich de opdrachten enthousiast eigen, wat het leerproces zeker bevorderd heeft. Het geroezemoes in de klas nam ik er graag bij.

Som- en verschilformules van cosinus met twee rechthoekige driehoeken

Paul Levrie

In een vorige bijdrage (zie Levrie en Missine, 2012) hebben we twee bewijzen gegeven voor de som- en verschilformules voor de cosinus. Recent botsten we op het volgende, ook wel erg leuke bewijs (zie Nystedt, 2014).

We vertrekken van twee hoeken, α en β, en vormen op de volgende manier een driehoek.



Figuur 1 Basisfiguur voor de somformule

De zijden van de grote driehoek hebben als afmetingen a, b en c. Deze driehoek bestaat uit twee rechthoekige driehoeken. Je kunt de lengtes van alle zijden aflezen op de figuur. We passen in de grote driehoek de cosinusregel toe:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha + \beta).$$

en werken deze formule om naar $\cos(\alpha + \beta)$:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

De eerste twee termen van de teller in het rechterlid kunnen we uitschrijven met de stelling van Pythagoras, toegepast in beide rechthoekige driehoeken in de figuur. Tegelijkertijd vervangen we c door $x + y$. Zo vinden we:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{(x^2 + h^2) + (y^2 + h^2) - (x + y)^2}{2ab}$$

waaruit volgt dat:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{h^2 - xy}{ab}$$

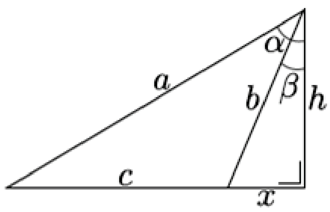
of:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{h}{a} \cdot \frac{h}{b} - \frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b}.$$

Door de definities van sinus en cosinus toe te passen in de twee rechthoekige driehoeken vinden we de somformule voor de cosinus:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Een kleine aanpassing laat ons toe de verschilformule voor de cosinus af te leiden.



Figuur 2 Basisfiguur voor de verschilformule

De rest van het bewijs laten we aan de lezer over.

Bronnen

Levrie, P., Missinne, H. (2012). Somformule voor sinus en cosinus, met en zonder driehoeken*, Uitwiskeling 28/2*, 2-3.

Nystedt, P. (2014). A Proof of the Cosine Addition Formula Using the Law of Cosines, *Math. Mag. 87/2*, 144.

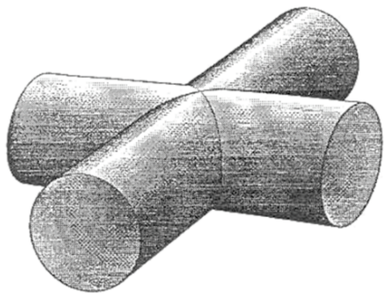
De vogelkooi van Archimedes, Zu Chongzhi, Steinmetz en anderen

Michel Roelens

Als leraar wiskunde in het zesde jaar (6u wiskunde) ben ik altijd geïnteresseerd in originele opgaven over volume- of oppervlakte-berekening met integralen. Zo kwam ik uit bij de *bicilinder* of *vogelkooi*. Dit ruimtelichaam is bijzonder interessant: om het te beschrijven, moeten leerlingen hun ruimtelijk voorstellings-vermogen aanspreken; het volume en de oppervlakte kunnen zowel met als zonder integralen berekend worden en bovendien heeft dit lichaam een rijke geschiedenis.

1. Het voorwerp beschrijven

Beschouw twee cilinders die elkaar loodrecht snijden zoals in figuur 1. Het zijn 'volle', rechte cilinders met cirkelvormige grondvlakken. De stralen van de grondvlakken zijn gelijk. De symmetrieassen van deze cilinders snijden elkaar loodrecht. Terwijl figuur 1 de unie toont, zijn we geïnteresseerd in de doorsnede. De cilinders zijn 'lang genoeg': de grond- en bovenvlakken liggen buiten de doorsnede. Je zou evengoed kunnen werken met oneindig lange cilinders.



Figuur 1 (Bron: mathenjeans)

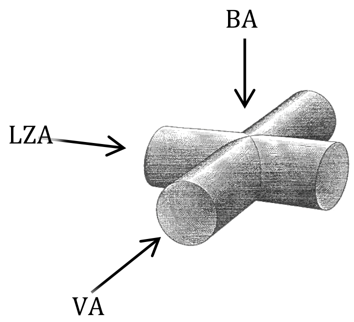
Deze doorsnede noemen we een *bicilinder*. Andere namen die je in de literatuur tegenkomt zijn 'equidomoïde' (Mathcurve), 'vogelkooi' (Stannard 1979) of lichaam van Steinmetz (naar de Duitse wiskundige en ingenieur Charles Proteus Steinmetz, 19de en 20ste eeuw).

Hoe ziet een bicilinder eruit? Daar gaat de eerste lesactiviteit over. Wie het niet gemakkelijk vindt om zich deze doorsnede voor te stellen, is zeker niet alleen: *"It takes an unusual gift of imagination to visualize this shape clearly."* (Strogatz, 2010).

begin lesactiviteit

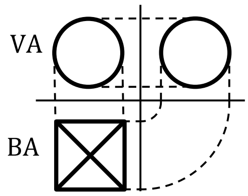
Beschrijving van de bicilinder

Een *bicilinder* is de doorsnede van twee volle cilinders die elkaar loodrecht snijden zoals in de figuur. De figuur toont de *unie* van de twee cilinders; je moet je proberen de *doorsnede* voor te stellen.



1. Teken een drieaanzicht van de bicilinder: een loodrecht vooraanzicht (VA), bovenaanzicht (BA) en linker zijaanzicht (LZA).

Hier is het gevraagde drieaanzicht volgens conventies van wetenschappelijk tekenen. Leerlingen die hier niet mee vertrouwd zijn, mogen die drie aanzichten ook 'los' van elkaar tekenen.



2. Welke vorm hebben de 'ribben'?

Het is een beetje ongewoon om over 'ribben' te spreken wanneer het lichaam geen veelvlak is. Vandaar de aanhalingstekens in de vraag. Je zou kunnen zeggen dat de bicilinder twee 'hoekpunten' heeft ('bovenaan' en 'onderaan'), vier gebogen zijvlakken en vier gebogen 'ribben' die de twee 'hoekpunten' verbinden.

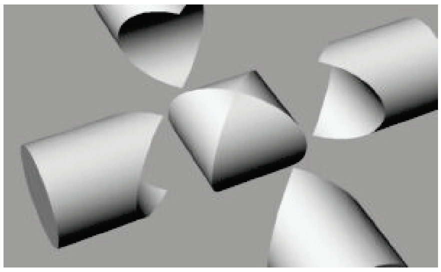
Misschien zijn er leerlingen die de vorm van de 'ribben' analytisch willen bepalen. Als je de assen van de cilinders als x- en y-as neemt en de straal r noemt, kun je als volgt de 'ribben' bepalen als doorsnede van de cilinderwanden.

$$\begin{cases} x^2+z^2=r^2 \\ y^2+z^2=r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+z^2=r^2 \\ x^2-y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+z^2=r^2 \\ (x-y)(x+y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+z^2=r^2 \\ x-y=0 \ \vee \ x+y=0 \end{cases}$$

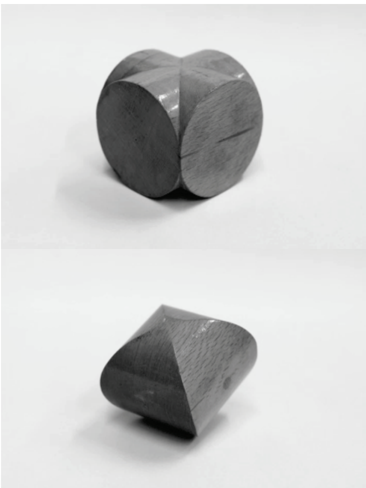
De 'ribben' ontstaan door één van de cilinders te snijden met de 'verticale' diagonaalvlakken. In plaats van analytisch, kon dit even goed op basis van de symmetrie ontdekt worden. Twee overstaande 'ribben' vormen dus telkens samen een ellips. De kleine as van deze ellipsen is de hoogte $2r$ van de bicilinder; de grote as is $2\sqrt{2}\,r$ (zie bovenaanzicht).

einde lesactiviteit

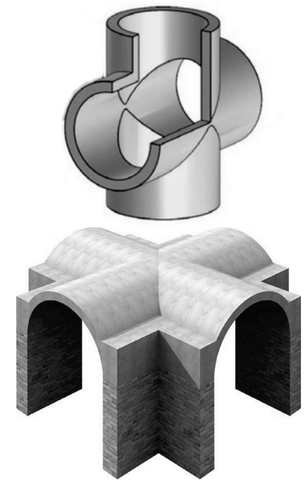
Hieronder zie je nog enkele mooie afbeeldingen van de bicilinder. Bewust hebben we die niet gegeven in de lesactiviteit hierboven; we wilden de verbeeldingskracht van de leerlingen aanspreken. Eventueel kun je de leerlingen van bij het begin ook figuur 3 tonen om opdracht 1 in de vorige werktekst gemakkelijker te maken.



Figuur 3 (Bron: Klingens, 2014)



Figuur 2 (Bron: Modellsammlung)



Figuur 4 (Bron: Gläser, 2007)

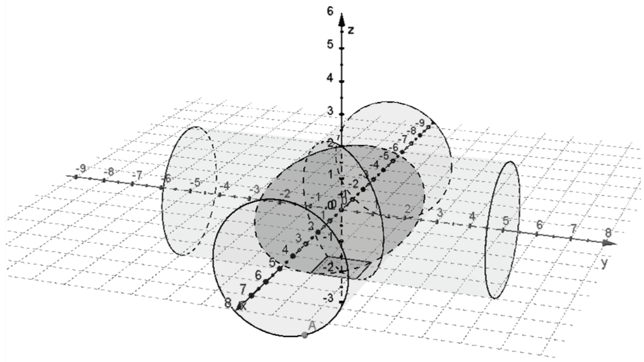
Het snijden van twee loodrechte cilinders komt ook voor in de techniek (buizen) en de architectuur (kruisgewelf), ook al gaat het dan niet in de eerste plaats over ons 'doorsnede'-lichaam (figuur 4).

2. Het volume

In de volgende lesactiviteit berekenen de leerlingen het volume van de bicilinder aan de hand van een integraal. Daarna laten we zien dat het ook zonder integraal mogelijk was geweest.

Eventueel kan tijdens deze activiteit ook een GeoGebrafiguur van de bicilinder en zijn sneetjes gemaakt worden. Of als je liever mijn (bescheiden) figuur gebruikt: ga naar GeoGebraTube en open de figuur 'bicilinder'.

Door punt A te verplaatsen, verandert de hoogte van de vierkante vlakke doorsnede en laat deze doorsnede een spoor na.



Figuur 5 Mijn GeoGebrafiguur 'bicylinder' op GeoGebraTube

begin lesactiviteit

Het volume van de bicilinder met een integraal

1. Geef een boven- en een ondergrens voor het volume van de bicilinder met straal r, door deze figuur te vergelijken met vertrouwde ruimtefiguren.

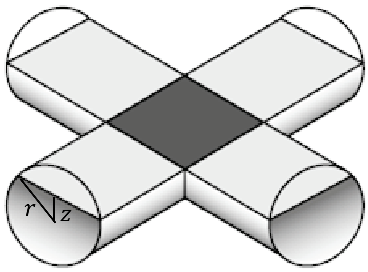
   De leerlingen kunnen hier bv. zeggen dat de bicilinder volledig binnen een kubus met zijde $2r$ *past. Binnen de bicilinder past een bol met straal r. Dit geeft de volgende afschatting:*

$$\frac{4\pi}{3}r^3 < V_{bicil} < 8r^3.$$

   Dit zegt nog niet zoveel (immers: $\frac{4\pi}{3} \approx 1{,}047$ *is veel kleiner dan* 8*). In plaats van het volume van een bol, kunnen ze als ondergrens ook het volume nemen van een achtvlak bepaald door de twee 'hoekpunten'* $(0,0,\pm r)$ *en de vierkante doorsnede met het xy-vlak. Dit volume is* $\frac{8}{3}r^3 \approx 2{,}67r^3$*. Een betere bovengrens kan ook nog gevonden worden: een cilinder met straal r en hoogte 2r. Het volume hiervan is* $2\pi r^3$ *of* $6{,}28\,r^3$*. Eventueel kunnen de leerlingen gokken wat de juiste coëfficiënt van* r^3 *is voor het volume van de bicilinder.*

2. Is de bicilinder een omwentelingslichaam? Welke 'sneetjes' hebben de gemakkelijkste vorm?

   Het is zeker geen omwentelingslichaam. De 'horizontale' sneetjes, d.w.z. loodrecht op de z-as bij een zelfde keuze van het assenstelsel als in de vorige werktekst, zijn vierkanten. De zijde van het vierkant op hoogte z is $2\sqrt{r^2 - z^2}$ *(zie figuur hieronder). Dit kan ook van de loodrechte aanzichten afgeleid worden.*



3. Schrijf het volume van de bicilinder als een integraal.

Het volume is

$$V = \int_{-r}^{r} \left(2\sqrt{r^2 - z^2}\right)^2 dz$$

4. Bereken die integraal.

   Dit levert geen moeilijkheden op:

$$\begin{aligned} V &= 4\int_{-r}^{r} (r^2 - z^2)dz \\ &= 4\left[r^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_{-r}^{r} \\ &= \frac{16r^3}{3} \approx 5{,}33\, r^3 \end{aligned}$$

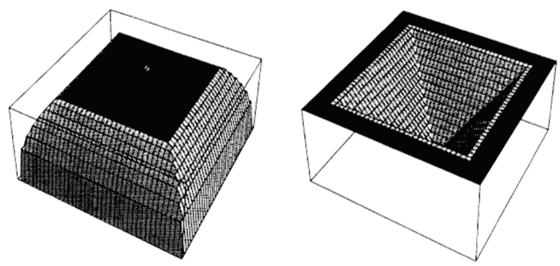
5. Vergelijk je resultaat met de boven- en ondergrens bij vraag 1.

   Het zit er inderdaad tussen. Voor wie als ondergrens het volume van het achtvlak nam: het volume van de bicilinder ($\frac{16}{3}r^3$) is precies het rekenkundig gemiddelde van dat van het achtvlak ($\frac{8}{3}r^3$) en dat van de kubus ($\frac{24}{3}r^3$). Of nog: het volume van het achtvlak is één derde van dat van de kubus; het volume van de bicilinder twee derde. Merkwaardig!

einde lesactiviteit

Zonder integralen

In Temple (1994) vonden we een manier om het volume van de bicilinder te bepalen met het principe van Cavalieri. Het principe van Bonaventura Cavalieri (17de eeuw) zegt: *als op elke hoogte de horizontale doorsnedes van twee ruimtelichamen dezelfde oppervlakte hebben, dan hebben deze ruimtelichamen hetzelfde volume.* In figuur 6 zie je links de bovenste helft van de bicilinder en van zijn omgeschreven (halve) kubus (ribbe $2r$), afgesneden op hoogte z. Rechts zie je diezelfde halve kubus met daarin ingeschreven een piramide met de top naar beneden, eveneens afgesneden op hoogte z. Het zwarte vierkant links heeft als zijde $2\sqrt{r^2 - z^2}$ (zie vorige lesactiviteit) en dus als oppervlakte $4(r^2 - z^2)$. Het zwarte gebied rechts is een vierkant van zijde $2r$ waaruit een vierkant van zijde $2z$ is weggehaald. Immers, de opstaande zijvlakken van de piramide vormen hoeken van 45° met het horizontaal vlak. De oppervlakte van dit zwarte gebied is dus $4r^2 - 4z^2$. Op elke hoogte z is de oppervlakte van de doorsnede van de bicilinder gelijk aan de oppervlakte van de doorsnede van de halve kubus waaruit die piramide is weggehaald. Bijgevolg zijn, volgens het principe van Cavalieri, de volumes gelijk en is het volume van de halve bicilinder gelijk aan $\frac{2}{3}$ van het volume van de halve kubus. Door symmetrie is het volume van de hele bicilinder dus ook gelijk aan $\frac{2}{3}$ van dat van de hele kubus.



Figuur 6 (Bron: Temple, 1994)

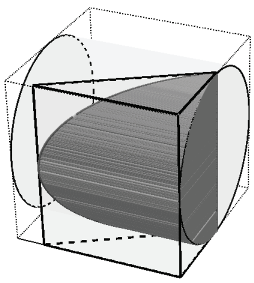
Ook opmerkelijk is dat de formule voor het volume van de bicilinder het getal π niet bevat, maar een rationale verhouding heeft met het volume van de omgeschreven kubus. Bovendien is deze verhouding $\frac{2}{3}$ ook gelijk aan de verhouding van de volumes van een bol en de omgeschreven cilinder. Hier wordt verder op ingegaan in Apostol & Mnatsakanian (2004).

Historisch

Archimedes vermeldt de bicilinder in zijn inleiding op 'De Methode'. Over dit werk kun je meer lezen in de bespreking van Netz & Noel (2007) in UW 25/4. Archimedes vermeldt dat het volume $\frac{2}{3}$ is van dat van de omgeschreven kubus. Hij merkt hierbij op:

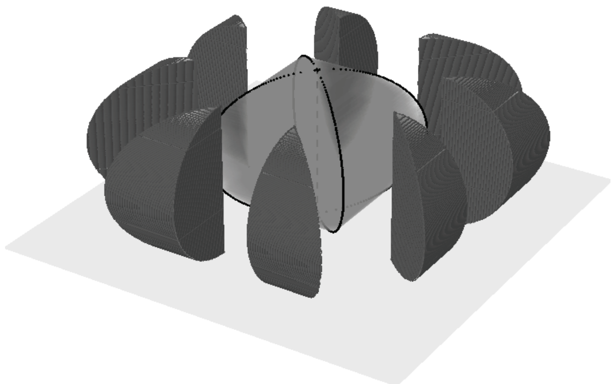
> *"In tegenstelling tot bollen, kegels en cilinders is dit voorwerp gelijk* [*in volume*] *aan een ruimtelichaam begrensd door vlakke figuren."*

Zijn bewijs van dit resultaat is niet bewaard; van 'De Methode' is immers niet de volledige tekst teruggevonden. Wat wel teruggevonden is (zie dezelfde bespreking), is hoe hij het volume van een 'cilindersegment' bepaalde (zie figuur 7). Hij toonde aan dat het volume van zo'n cilindersegment $\frac{2}{3}$ is van het volume van het omgeschreven prisma.



Figuur 7: Cilindersegment met omgeschreven prisma

Het is zeer waarschijnlijk dat hij de bicilinder bekeek als samengesteld uit cilindersegmenten. Het volume van de bicilinder is het totale volume van acht dergelijke cilindersegmenten en als je de omgeschreven prisma's van deze cilindersegmenten samenvoegt, heb je de omgeschreven kubus. Hieruit volgt dan dat het volume van de bicilinder $\frac{2}{3}$ is van dat van de kubus.



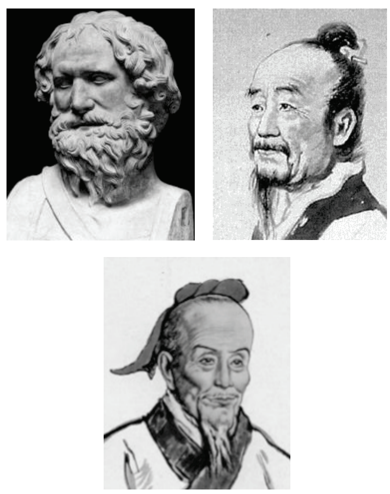
Figuur 8: De bicilinder is samengesteld uit acht cilindersegmenten.

刘徽 (Liú Huī, 3de eeuw n.C.) gebruikte in zijn Commentaren op de 九章算术 (Jiǔzhāng Suànshù: Negen hoofdstukken van de wiskunst, 2de eeuw v.C.) de bicilinder om het volume van een bol te bepalen. Hij voerde de bicilinder niet in als doorsnede van twee cilinders, maar door een bol in horizontale sneetjes te verdelen en elk cirkelvormig sneetje te vervangen door een omgeschreven vierkant, zoals in figuur 9 (cadav92, 2014).

Figuur 9 (Bron: cadav92, 2014)

Dit levert voor ons een gemakkelijkere methode op om de bicilinder in GeoGebra te tekenen en ook om het volume van de bicilinder te berekenen uit dat van de bol (het omgekeerde van wat Liú Huī deed). De verhouding van de volumes van deze twee lichamen is immers precies gelijk aan de verhouding van de oppervlakte van een cirkel en het omgeschreven vierkant, een variant op de hogergenoemde stelling van Cavalieri.

Ook 祖冲之 (Zǔ Chōngzhī, 5de eeuw, bekend voor zijn benadering van het getal π) vermeldt de bicilinder, onder de naam 牟合方蓋 (hegai, letterlijk: dubbel deksel). Hij bepaalde het volume met een methode die op hetzelfde neerkomt als de latere methode van Cavalieri (zie hoger).



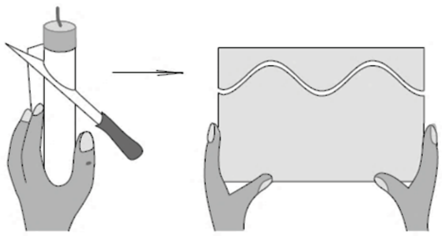
Figuur 10: Archimedes, Liú Huī en Zǔ Chōngzhī

3. De oppervlakte

Voor de oppervlakte, merken we op dat we vier gebogen zijvlakken hebben. Elk van deze stukken heeft dezelfde oppervlakte. Eén stuk bestaat uit een cilindermantel tussen twee diagonaalvlakken.

In Eggermont (2012), en nog op veel andere plaatsen, wordt bewezen dat de vlakke ontwikkeling van een cilinder, afgesneden door een schuin vlak, begrensd is door een sinuskromme. In de lesactiviteit hieronder gaan we ervan uit dat de leerlingen dit al weten.

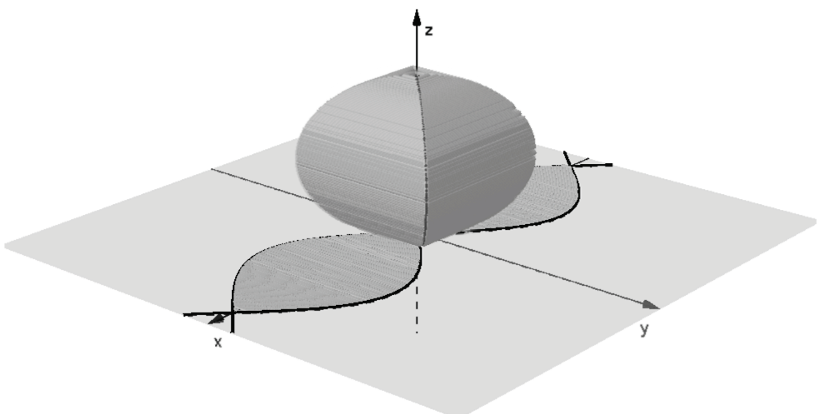
Als we hier één van deze gebogen vlakken plat leggen, hebben we dus het gebied tussen twee sinuskrommen. De oppervlakte is dus gemakkelijk te vinden met een integraal.



Figuur 11: De vlakke ontwikkeling van een schuin afgesneden cilindermantel heeft als rand een sinuskromme.

begin lesactiviteit

De oppervlakte van de bicilinder met een integraal



Op de figuur hierboven zie je dat twee van de vier 'zijvlakken' van de bicilinder in het xy-vlak ontwikkeld zijn. De grenskrommen van deze vlakke gebieden zijn sinusgrafieken.

1. Bepaal het voorschrift van deze twee sinusgrafieken. De straal van de cilinders is r.

   De leerlingen kunnen beginnen met de sinuskromme die in het eerste en derde kwadrant van het xy-vlak loopt. Dit is de grafiek van een functie van de vorm $f(x) = a \sin bx$ met amplitude a en periode $\frac{2\pi}{b}$. De amplitude a is r. De periode, dus de totale lengte in de x-richting van de twee gebieden achter elkaar, is de omtrek van de cilinders, dus $2\pi r$. Dus is $b = \frac{1}{r}$. Dit geeft: $f(x) = r \sin \frac{x}{r}$. De andere functie is hiervan gewoon het tegengestelde.

2. Bereken de oppervlakte van de bicilinder met een integraal.

   Dit zou nu geen problemen mogen opleveren:

$$\begin{aligned} A_{\text{bicil}} &= 8r \int_0^{\pi r} \sin\frac{x}{r}\,\mathrm{d}x \\ &= 8r\left[-r\cos\frac{x}{r}\right]_0^{\pi r} \\ &= 8r^2(-(-1)+1) \\ &= 16r^2 \end{aligned}$$

Opnieuw valt op dat hier geen π in voorkomt! De oppervlakte is gewoon die van een vierkant met zijde $4r$.

3. Vergelijk je resultaat met de oppervlakte van de omgeschreven kubus.

   De oppervlakte van de omgeschreven kubus is $6 \cdot 4r^2 = 24r^2$. Net als bij de volumes, is de verhouding van de oppervlakten ook $\frac{2}{3}$.

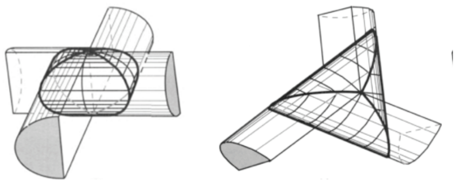
einde lesactiviteit

Het feit dat de oppervlakte van de bicilinder gelijk is aan de oppervlakte van een vierkant met zijde $4r$, is cultureel interessant. Het betekent dat de *kwadratuur* hier mogelijk is, het construeren met passer en liniaal, vertrekkend van de gegeven straal r, van een vierkant met dezelfde oppervlakte als de bicilinder. Dit komt natuurlijk op hetzelfde neer als de kwadratuur van het gebied tussen een sinusgrafiek en de x-as; in feite is dezelfde verwondering op zijn plaats wanneer je de eerste keer $\int_0^\pi \sin x \, dx$ berekent... De kwadratuur van de cirkel is één van de beroemde constructieproblemen uit de Griekse oudheid, waarvan in de 19de eeuw is aangetoond dat ze onmogelijk op te lossen zijn met passer en liniaal.

In Hogendijk (2002) wordt uitgelegd hoe je de oppervlakte in plaats van met een integraal, ook kunt afleiden van het volume, op een manier die volledig aansluit bij de wijze waarop Archimedes de oppervlakte van een bol uit het volume van de bol afleidde.

4. Enkele veralgemeningen

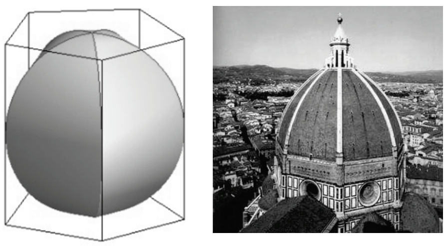
Een eerste veralgemening bestaat uit het bedenken van analoge ruimtefiguren met een ander aantal gebogen 'zijvlakken' dan vier. Je kunt je gemakkelijk voorstellen dat je er eentje kunt maken met $6\ (\text{of } 8, \ldots, 2n)$ 'zijvlakken' wanneer je 3 (of $4, \ldots, n$) cilinders laat snijden, met gelijke stralen en waarvan de assen in één vlak liggen en elkaar in één punt snijden onder gelijke hoeken van 60° (of $45°, \ldots, \frac{180°}{n}$). Lukt het ook om een oneven aantal 'zijvlakken' te verkrijgen? Het aantal cilinders is de helft van het aantal 'zijvlakken' en je kunt toch niet met halve cilinders werken... Waarom niet eigenlijk? In figuur 12 wordt de vertrouwde bicilinder op een andere manier gemaakt (niet meer echt als doorsnede) en deze manier is wel te veralgemenen tot een oneven aantal 'zijvlakken'. In Mathcurve spreekt men van veelhoekige *equidomoïdes*. De bicilinder is dan een vierhoekige equidomoïde.



Figuur 12 (Bron: Apostol & Mnatsakanian, 2004)

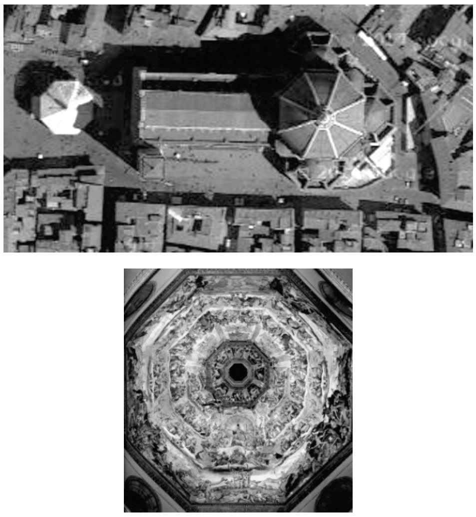
Op die site wordt beweerd dat de koepel van de kathedraal van Firenze een (halve) vijfhoekige equidomoïde is.

Om ons hiervan te overtuigen, plaatsen ze de volgende twee figuren naast elkaar (figuur 13).



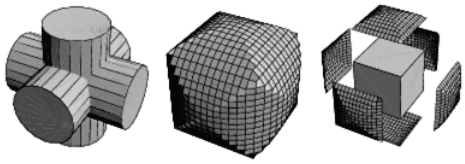
Figuur 13 (Bron: Mathcurve)

Nochtans zie je duidelijk op de foto dat er meer dan vijf 'zijvlakken' zijn. Een luchtfoto toont een mooie achthoek (figuur 14), die je ook zonder helikopter (en dus goedkoper) kunt bewonderen door in de kathedraal binnen te gaan en naar boven te kijken.



Figuur 14

Een andere veralgemening bestaat erin om drie cilinders te nemen met dezelfde straal en met de assen twee aan twee loodrecht en alle drie door een zelfde punt. Er ontstaat een *tricilinder.* Dit is een zeer interessant voorwerp, een gebogen ruitentwaalfvlak (figuur 15). Ik kan mij voorstellen dat sommige lezers nieuwsgierig zijn naar het volume en de oppervlakte van dit ruimtelichaam, maar toch houden we het hierbij.



Figuur 15 (Bron: Mathworld)

Bronnen

Apostol, T.A., Mnatsakanian, M.A. (2004). A Fresh Look at the Method of Archimedes. *American Mathematical Monthly 111*, 469-508. https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Ford/Apostol496-508.pdf

Cadav92 (echte naam niet bekend) (2014). A great invention: the double box-lid model, *Liu Hui and his mathematic career.* https://liuhuimathmatician.wordpress.com/tag/bicylinder/

Cohen, D. (1991), Estimating the volumes of solid figures with curved surfaces, *Mathematics Teacher 84/5*, 392-395. http://verjinschi.disted.camosun.bc.ca/courses/M%20101/class%20notes/s7.2%20probi%2064.pdf

De Temple, D.W. (1994), An Archimedian Property of the Bicylinder. *The college Mathematics Journal, 25*(4), 312-314. http://www.maa.org/sites/default/files/0746834209146.di020763.02p0071v.pdf

Eggermont, H. (2012). De kop van een mouw. In: Wiskunde en breien, *Uitwiskeling 28/1*, 29-31.

Glaezer, G. (2007). *Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik*. 2. Auflage, München: Elsevier, Spektrum Akad. Verlag.

Hogendijk, J.P. (2002), The surface area of the bicylinder and Archimedes' Method, *Historia Mathematica 29*, 199-203. http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086002923499

Klingens, D. (2014). *Kokinje*. http://www.pandd.demon.nl/rhino/kokinje.htm

Mathcurve. www.mathcurve.com

Mathenjeans. www.mathenjeans.fr

Mendell, H. (s.d.) *Some Introductory Material on Infinitary Arguments in Ancient Greek Mathematics*, http://web.calstatela.edu/faculty/hmendel/

Modellsammlung, http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/modelle/

Netz, R., Noel, W. (2007). *De Archimedes-codex, de geheimen van een opzienbarende palimpsest ontsluierd*, Athenaeum-Polak & Van Gennep, Amsterdam. Besproken in *Uitwiskeling 25/4* (2009), 59-65.

Roelens, M. (2013). Ontmoeting van twee cilinders, *Uitwiskeling 29/1*, 9-12.

Roelens, M. (2014). *Quand des cylindres se rencontrent*, Lezing/workshop op het congres van de Société belge des professeurs de mathématiques d'expression française, Namur, 27 augustus 2014.

Stannard, W.A. (1979). Applying the techniques of Archimedes to the 'birdcage' problem. *Mathematics Teacher 72*, 58-60.

Strogatz, S. (2010). It slices, it dices, *The New York Times Opinionator.* http://opinionator.blogs.nytimes.com/2010/04/18/it-slices-it-dices/

Onder de loep

Oneindig en oneindig is twee

Anne Schatteman

Luc Van den Broeck

Inhoud

1. Inleiding

Misvattingen

De betekenis van het begrip oneindig is voor de meeste mensen vaag. Vraag je aan collega's of aan leerlingen wat er met oneindig bedoeld wordt, dan krijg je uiteenlopende antwoorden: een getal groter dan elk ander getal, het heelal, je kunt er steeds 1 bijtellen, de tijd, 9999999... Wat opvalt: iedereen is gefascineerd door het begrip. Maar er is nood aan het exact maken van de intuïtieve kennis van het begrip oneindig.

Alleen al binnen de wiskunde dekt het woord 'oneindig', net zoals het symbool ∞ trouwens, een grote lading. We kunnen oneindig bijvoorbeeld zien als een (onbegrensd) aantal. Maar bedoelen we hiermee het aantal elementen van de verzameling van de natuurlijke getallen of eerder het aantal elementen van de verzameling van de reële getallen? En gebruiken we de term in de analyse ook niet bij limieten ($x \to +\infty$)? En rekenen we dan niet met ∞, alsof het een getal zou zijn? Hoe verwarrend. We willen in deze loep duidelijk maken dat we voorzichtig dienen om te springen met deze verschillende invalshoeken, want de betekenis van het begrip 'oneindig' in deze contexten is niet dezelfde. We gebruiken hetzelfde woord voor andere begrippen.

Verder bestaan er heel wat misconcepties rond het begrip oneindig. Niet te verwonderen dat heel wat grote wiskundigen hier in het verleden moeite mee hadden. Denken we bijvoorbeeld aan de paradoxen van Zeno, die berusten op de misvatting dat de som van oneindig veel positieve getallen oneindig is. We kunnen ook denken aan de paradox van Galilei uit de Dialoog tussen Simplicio, Salviati en Sagredo: er zijn meer natuurlijke getallen dan kwadraten maar toch heeft elk natuurlijk getal precies één kwadraat. Verder is er nog de bekende paradox over de trompet van Torricelli, die een eindige inhoud heeft en een oneindige oppervlakte. We kunnen deze trompet niet aan de binnenkant schilderen met een eindig aantal verfpotten. Maar misschien kunnen we ze wel volgieten met verf en ze daarna weer leeggieten in de hoop dat er een laagje verf aan de binnenkant blijft zitten.

Het doel van deze loep is verschillende aspecten van oneindig te verduidelijken en alertheid te creëren voor gevaarlijke intuïtieve gevolgtrekkingen.

Verschillende betekenissen

Het begrip oneindig duikt op verschillende manieren op.

'Oneindig' kun je zien als een kardinaalgetal van een niet eindige verzameling. We zitten dan in de context van de *verzamelingenleer*. Alhoewel deze context nergens een doel op zich is in het secundair onderwijs, kunnen we er niet omheen willen we het begrip oneindig verduidelijken. Onze leerlingen komen het begrip oneindig tegen van in de eerste graad: ze leren dat er oneindig veel natuurlijke (gehele, rationale…) getallen zijn en dat er oneindig veel punten op een rechte liggen. In deze loep willen we aanmoedigen om dit aspect van het begrip oneindig niet uit de weg te gaan in de sterkere klassen, en dit reeds van in de eerste graad. De begrippen 'verzameling' en 'bijectie' zijn dan wel belangrijk, maar kunnen omschreven worden in een terminologie die dichtbij de leerlingen staat en via talrijke voorbeelden. Het kader van 'verzamelingen en relaties' hoeft ook niet op een abstracte wijze theoretisch behandeld te worden. We denken juist dat er veel meer woorden nodig zijn om de oneindigheid van de getallenverzamelingen en van rechten en lijnstukken in het vlak te beschrijven. Er wordt daar nu nogal snel overgegaan, met mogelijke misvattingen als gevolg.

Het tweede beeld dat we naar voor willen brengen, is het feit dat 'oneindig' geen getal is maar gezien kan worden als een *limietsituatie van een dynamisch proces*. Van zodra er reële functies met een asymptotisch gedrag verschijnen in het leerplan (tweede graad) komt dit aspect ter sprake. In deze context kunnen later ook bewerkingen met oneindigheden gemotiveerd worden. De bewerking $\infty + \infty$ betekent dan: als we twee functies hebben die naar oneindig gaan (voor $x \to a$) dan zal de somfunctie ook naar oneindig gaan (voor $x \to a$). 'Naar oneindig gaan' is een uitdrukking die een diepe betekenis heeft. Ook hier zijn weer meer woorden voor nodig om het juiste inzicht te bekomen.

In de analyse speelt niet alleen het oneindig grote een rol, maar ook het oneindig kleine (bij limieten, continuïteit, afgeleide…). In deze loep zullen we het voornamelijk hebben over oneindig groot en veel minder over oneindig klein.

Wat mag je verder verwachten

Paragraaf 2 gaat over het wegwerken van misvattingen over oneindig in de eerste en de tweede graad. We laten zien dat de terminologie en notaties voor getallenverzamelingen niet altijd transparant zijn voor leerlingen. We gaan in de klas vaak veel te snel over het begrip oneindig. Hetzelfde geldt voor elementaire meetkundebegrippen. De natuurlijke nieuwsgierigheid van de leerlingen rond het mysterieuze begrip 'oneindig' kan een start zijn voor een boeiend klasgesprek zo dat de leerlingen de juiste basis leggen voor dit begrip.

In paragraaf 3 wordt de wiskundige achtergrond behandeld van 'oneindig als kardinaalgetal': $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$, en $\mathbb{Q}$ zijn aftelbaar oneindig, $\mathbb{R}$ is overaftelbaar oneindig. Werkteksten maken het mogelijk om dit op het eerste zicht moeilijke aspect toch begrijpbaar te maken voor leerlingen vanaf de tweede graad, al kunnen leerlingen uit de eerste graad hier mogelijk ook een graantje van meepikken. Het afpaarmechanisme kan immers gebruikt worden om de moeilijkere term 'bijectie' te onderscheppen.

De paragrafen 4, 5 en 6 zijn eerder bestemd voor de lessen in de derde graad. In het 'Hotel van Hilbert' achterhalen we waarom een volgeboekt, denkbeeldig hotel met aftelbaar veel kamers plaats kan bieden aan een nieuwe groep toeristen, zelfs al zijn ze met oneindig veel. Verder belichten we een hele serie onbepaalde bewerkingen met oneindig: $\infty - \infty, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty$ … In een klasgesprek zoeken we uit waarom deze bewerkingen onbepaald zijn. Tot slot geven we nog een woordje uitleg bij de oneindige sommen en oneindige integralen die in sommige richtingen van de derde graad aan bod komen.

We eindigen in paragraaf 7 met enkele filosofische vragen zoals 'komt oneindig voor in de realiteit'? en 'wat zijn de grootste getallen die tot nu toe echt betekenis hebben'?

In de klas

Deze loep kan op verschillende manieren gebruikt worden. Misschien wordt het thema gekozen om er in een vrije ruimte tijd aan te besteden. Dit kan. Maar deze loep is niet in de eerste plaats met dit doel geschreven. We willen eerder een inhoudelijke houvast bieden voor wanneer het begrip ‘oneindig’ ter sprake komt in de dagelijkse lessen. Als je leerlingen een goed inzicht in het begrip ‘oneindig’ wilt geven, worden die klasgesprekken best niet uit de weg gegaan. Maar wanneer de leerkracht zich laat overhalen tot een onvoorbereide discussie over dit onderwerp, lopen de gesprekken soms uit de hand en gaat de schoolbel op het einde van de les vooraleer er een duidelijk resultaat is geboekt. Deze loep biedt de leerkracht enkele opdrachten die uit de boekentas kunnen worden gevist als het wonderlijke moment van gezonde nieuwsgierigheid van de leerlingen de bovenhand neemt. Door deze loep preventief door te nemen, bereidt de leerkracht discussieargumenten voor een klasgesprek voor. Je zou deze loep dus kunnen beschouwen als een voorraad diepgevroren pakketjes die je laat ontdooien wanneer de honger er is.

2. ‘Oneindig’ in de eerste en de tweede graad

2.1. De getallenverzamelingen

De natuurlijke getallen

Reeds van in het begin in de eerste graad komen leerlingen in contact met verschillende aspecten van het begrip ‘oneindig’. We starten in het eerste jaar met de introductie van de natuurlijke getallen. We zien elk natuurlijk getal als een telresultaat, wat een juiste en heel ‘natuurlijke’ zaak is. Maar dan worden er heel snel notaties ingevoerd:

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\} \qquad (1)$$

waarbij in de handboeken vermeld wordt

1. dat het een verzameling is;
2. dat de elementen opgesomd worden of in een lijst worden neergeschreven met speciale accolades errond;
3. dat de puntjes achteraan aangeven dat er oneindig veel elementen in zitten; (soms staat dit er niet bij);
4. dat die verzameling genoteerd wordt met $\mathbb{N}$.

Hier vallen we met de deur in huis. De begrippen die hier aangeraakt worden (verzameling, opsomming, $\mathbb{N}$) komen niet uit de dagelijkse taal. Laten we niet hopen dat door die woorden gewoon af en toe te gebruiken de leerlingen het juiste begrip en inzicht gaan leren. Dit is niet gewoon ‘taal’. Hier zitten moeilijke concepten achter. Elk van deze vermeldingen vraagt veel meer uitleg zonder dat we verzamelingenleer op een theoretische manier moeten onderwijzen.

1. Een verzameling is een collectie van verschillende objecten die duidelijk te onderscheiden zijn van elkaar. We voegen hier best nog enkele voorbeelden aan toe waarbij het duidelijk wordt dat er geen dubbels mogen inzitten, dat de objecten niet noodzakelijk iets met elkaar moeten te maken hebben, met variatie in ‘aantal elementen’…
2. De komma’s geven aan dat we de natuurlijke getallen in een rijtje kunnen plaatsen. De volgorde doet er niet toe, hoewel we toch meestal ordenen volgens grootte. Dit kunnen we vaak doen met de elementen van een verzameling maar niet altijd. Als je ze op een rijtje kunt zetten, kun je erbij zeggen “dit is het eerste element, dit is het tweede, het derde, enz.”
3. Die drie puntjes willen zeggen dat de opsomming niet stopt, dat er steeds een nieuw getal, verschillend van alle vorige kan gevonden worden dus dat er oneindig veel elementen in de verzameling zitten. Misschien leggen we hier best niet te veel nadruk op het alsmaar groter worden van de getallen; dit benadrukt eerder de onbegrensdheid dan de oneindigheid.
4. Er staat bij de verzameling een naam, in symbolen ’$\mathbb{N}$’, in woorden ‘de verzameling van de natuurlijke getallen’.

We hebben dus heel wat te vertellen om de uitdrukking in (1) betekenis te geven.

De gehele getallen

Na een instap waar de focus ligt op de introductie van het toestandsteken, lijkt het dat de gehele getallen zonder veel moeite, in navolging van $\mathbb{N}$, kunnen worden aangebracht.

$$\mathbb{Z} = \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$$

Niets is minder waar. De uitdrukking omvat weer heel wat; opnieuw is er veel dialoog nodig om dit zonder misvattingen te verwerken.

De gehele getallen zijn een uitbreiding van de natuurlijke getallen, dus ze vormen zeker ook een oneindige verzameling. Maar die drie puntjes links intrigeren. Ik hoor het de leerlingen al zeggen: ‘oneindig langs twee kanten, dat is straf: het lijkt dubbel oneindig te zijn’. De oneindigheid van $\mathbb{Z}$ krijgt dus een klemtoon die het niet verdient. Misschien is dit het uitgelezen ogenblik om te filosoferen over 'oneindig': is het oneindig van $\mathbb{Z}$ inderdaad 'groter' dan dat van $\mathbb{N}$?; kunnen we de elementen van $\mathbb{Z}$ ook in een lijst rangschikken?; we zien in de bovenstaande uitdrukking toch niet een eerste element, een tweede element, enz.? Met een aangepaste vraagstelling komen we zeker tot een andere voorstelling van de verzameling bv.

$$\mathbb{Z} = \{0,1,-1,2,-2\ldots\}$$

Met een goede bordschikking introduceren we een afpaarmechanisme dat met elk element van $\mathbb{N}$ een element van $\mathbb{Z}$ laat overeenkomen en omgekeerd:

$$\begin{array}{cccccccc} \mathbb{N} = & \{ & 0, & 1, & 2, & 3, & 4 & \cdots & \} \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \mathbb{Z} = & \{ & 0, & 1, & -1, & 2, & -2, & \cdots & \} \end{array}$$

Hoe vreemd: een deel van $\mathbb{Z}$ met 'evenveel' elementen als $\mathbb{Z}$. We kunnen in de klas opmerken dat we oneindige verzamelingen niet met dezelfde terminologie omschrijven als we gebruiken voor eindige verzamelingen. Woorden zoals 'evenveel', 'meer' en 'minder' hebben in deze context geen zin. We belichten samen met de leerlingen hoe eindige verzamelingen verschillen van oneindige verzamelingen.

Voorbeeld

Alle elementen van $\mathbb{Z}$ kunnen we identificeren (afparen) met elementen van een echt deel van $\mathbb{Z}$, namelijk $\mathbb{N}$. Dat kunnen we met eindige verzamelingen nooit realiseren: er is geen identificatie mogelijk tussen $\{A, B, C, D\}$ en $\{C, D\}$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \to & \mathrm{C} \\ \mathrm{B} & \to & \mathrm{D} \\ \mathrm{C} & \to & ? \\ \mathrm{D} & \to & ? \end{array}$$

Het is belangrijk dat deze bedenkingen luidop gemaakt worden, en ook meer dan een keer.

De rationale getallen

Na een instap die het bestaan van breuken, ook negatieve, motiveert, komen we in de klas bij de definitie van rationale getallen:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}_0 \right\} \quad (2)$$

Wat een ommezwaai in notatie: geen puntjes meer, geen lijst van getallen gescheiden door komma's… Bovendien wordt er gebruik gemaakt van een nieuw symbool: de verticale streep betekent 'waarvoor geldt'; binnen de accolades van een verzameling gebruiken we hiervoor geen dubbel punt. De leerlingen weten zeker en vast dat er hier ook sprake is van oneindig veel getallen, maar het lijken er oeverloos veel… veel meer dan ervoor, zo veel dat het lijkt alsof ze niet meer in een lijst kunnen geplaatst worden. Weken na de eerste les over de rationale getallen durven sommige leerlingen zelfs iets in de volgende zin op te schrijven, omdat ze de abstracte formulering vergeten zijn.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \cdots - \frac{7}{3}, -1, -\frac{3}{5}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \cdots \right\} \quad (3)$$

Onze opmerkingen in de zin van 'zo hebben we dat toch nooit genoteerd?' 'Zo ben je toch niet volledig?' zijn niet overtuigend: alsof we met onze beschrijvingen van $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{N}$ wel volledig zijn geweest.

Veel aspecten in bovenstaande notatie zijn wel interessant en roepen vragen op:

- Kunnen we de rationale getallen in lijst brengen? Ja. Zie verder voor meer uitleg hierover.
- Zijn er oneindig veel elementen? Ja.
- Er zit geen systeem in de opsomming? Ja. Maar is een systeem nodig?
- Kan ik met deze beschrijving van $\mathbb{Q}$ nagaan of een getal al dan niet een rationaal getal is? Neen.

Deze vierde vraag toont dus aan dat de notatie (3) fout is. Ook de derde vraag moet verder met de leerlingen onder de loep genomen worden. Dit kunnen we bijvoorbeeld aan de hand van het rooster positieve rationale getallen in figuur 1.

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \cdots \\ \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \cdots \\ \frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Figuur1

We vragen de leerlingen om creatief te zijn: hoe zouden we deze getallen kunnen doorlopen door er een lijst van te maken? Welk getal plaatsen we op de eerste plaats, welk op de tweede….. Wat lukt niet? Het doorlopen via de diagonaalrichting zal wellicht ter sprake komen. We verwijzen naar een opdracht in paragraaf 3.

De reële getallen

In de tweede graad komen de reële getallen op het toneel en dat is serieuze materie.

Van bij het begin identificeren we de reële getallen met de punten van een rechte. Die identificatie mogen we gerust in sterke richtingen een bijectie noemen, maar het moet niet. We stellen voor om met de leerlingen te filosoferen over het oneindige karakter van $\mathbb{R}$, nogmaals om misconcepties te vermijden. Laten we hen ook de verrassing niet ontnemen bij het ontdekken van die nieuwe oneindigheid. Een klasgesprek kan aanvankelijk volgende bedenkingen naar boven laten komen indien analoge gesprekken ook ooit vroeger gevoerd werden bij $\mathbb{N}, \mathbb{Z}\ en\ \mathbb{Q}$:

- Zouden we de reële getallen ook in een oneindige lijst kunnen plaatsen net zoals de rationale getallen?
- Waarom hebben we het gevoel dat er heel veel reële getallen zijn? Tussen twee reële getallen liggen er toch oneindig veel andere? Is dat eigenlijk ook niet het geval voor de rationale getallen? Die konden we toch op een rijtje plaatsen?

Dus er is aanvankelijk geen reden om niet aan te nemen dat de oneindigheid van $\mathbb{R}$ dezelfde is als die van $\mathbb{N}$. In sterke klassen zijn we dan op het punt gekomen om de verder beschreven opdrachten (we verwijzen naar paragraaf 3) i.v.m. de overaftelbaarheid van $\mathbb{R}$ uit te voeren.

2.2. Binnen de meetkunde

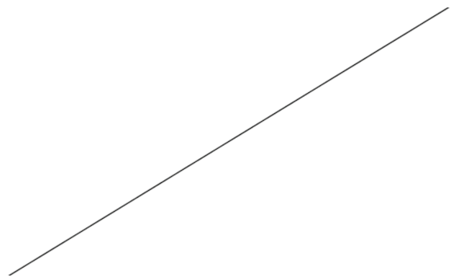
Reeds in de eerste les meetkunde in het eerste jaar van het secundair komen de moeilijkste aspecten van het begrip ‘oneindig’ aan bod. We citeren uit de eerste bladzijden van enkele handboeken:

> *‘Het vlak is een oneindige verzameling van punten. Het is onbegrensd. Het loopt oneindig voort naar boven, onder, links en rechts. … Een rechte is een verzameling van punten en dus een deelverzameling van het vlak. Een rechte is onbegrensd’.*

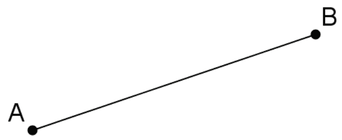
Of in een ander handboek:

> *‘Een rechte kunnen we ons voorstellen als een gespannen touw, dat we zowel links als rechts nog oneindig ver kunnen afrollen’. Een rechte is onbegrensd. Een lijnstuk is begrensd aan twee kanten.’*

Niet alleen komt er in de handboeken bijna telkens het begrip ‘verzameling’ ter sprake, bovendien worden de woorden ‘oneindig’ en ‘onbegrensd’ door elkaar gebruikt. We moeten hierbij heel voorzichtig zijn. Het doet lijken alsof ze synoniem zijn, wat helemaal niet het geval is. Daarboven komt nog dat we een rechte grafisch als volgt voorstellen:



Dus lijkt het alsof ze begrensd is. Een lijnstuk stellen we zo voor:



Hier zien we de grenspunten duidelijk. Wil dat dan zeggen dat deze verzameling niet oneindig is? Leerlingen zouden dit verkeerdelijk zo kunnen interpreteren.

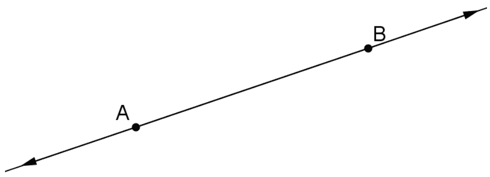
Opnieuw pleiten we ervoor om deze begrippen uitvoerig te omschrijven op het niveau van de leerlingen, om alle misopvattingen hierover in de kiem te smoren.

Een schema van mogelijke opbouw van een klasgesprek zou het volgende kunnen zijn:

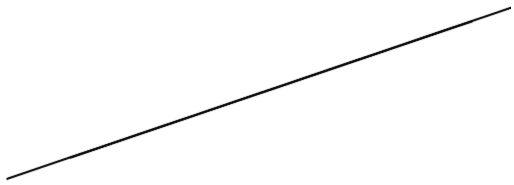
- We zetten een stip op het bord en benadrukken ‘dit is geen punt’. We plaatsen een stipje en benadrukken opnieuw ‘dit is geen punt’. We herhalen dit en overdrijven. ‘We kunnen het ons niet voorstellen, maar een punt heeft geen dikte. Het is iets ideaals. We kunnen het niet tekenen. We kunnen het ons alleen maar inbeelden’. We doen hetzelfde met een stip op een lessenaar…. Hoeveel punten kunnen we zo plaatsen op het bord, de lessenaar…?
- We nemen een touw en we veronderstellen dat het ideaal is, d.w.z. het touw heeft geen dikte. Dit kunnen we ons helemaal niet voorstellen want we voelen een dikte. We

moeten het ons dus 'inbeelden'. We leggen het touw op een lessenaar. Het 'ideale touw' bevat dus punten. Hoeveel punten?

– We spannen een deel van het touw op tussen beide handen. We benadrukken de twee eindpunten die het touwtje begrenzen. Dit stelt een begrensde verzameling van punten voor. We noemen dit een lijnstuk. Hoeveel punten liggen erop?
– Het touwtje staat strak gespannen. Het is 'recht'.
– We verlengen het gespannen touw door twee punten vast te houden die verder van elkaar liggen. Hoeveel punten liggen erop? Is het begrensd of niet?
– We tekenen de situatie op het bord:



We beelden ons in dat we de twee eindpunten van elkaar doen wegvliegen, zonder dat die punten ergens stoppen. Hebben we dan nog grenspunten? We hebben geen lijnstuk meer. We hebben een rechte. Kunnen we die tekenen? Waarom niet? We zullen dus iets afspreken: als we een lijnstuk tekenen, duiden we heel duidelijk de grenspunten aan. Willen we de illusie van een rechte opwekken dan tekenen we:

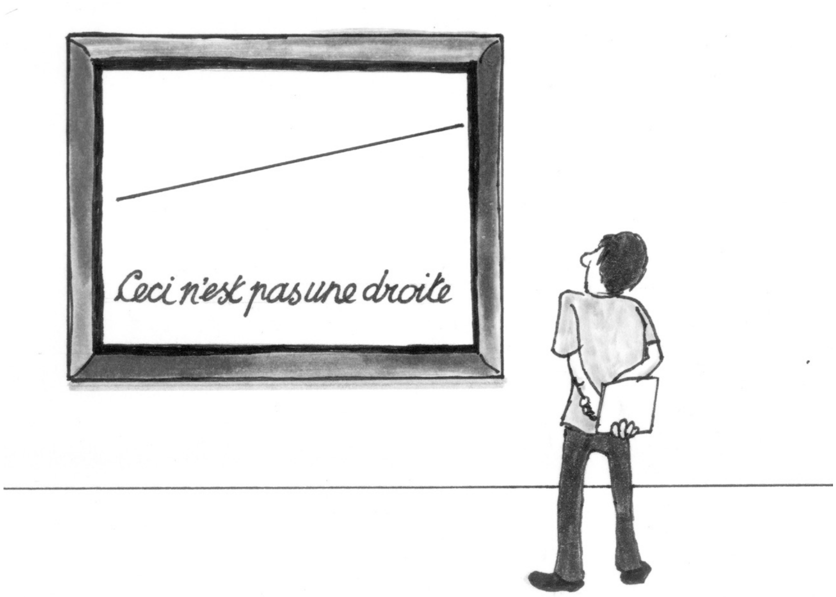


We zien geen grenspunten meer.

Om de nieuwe inzichten te verstevigen vatten we samen:

– Hoeveel punten liggen er op een rechte? Is een rechte begrensd?
– Hoeveel punten liggen er op een lijnstuk? Is een lijnstuk begrensd?
– Neem ik twee punten vast op de rechte, wat stelt het deel ertussen dan voor? Hoeveel punten liggen er op dat lijnstuk? Stel ik neem een korter lijnstuk; nog een korter… steeds oneindig veel punten… dus tussen twee punten liggen…?

Het is belangrijk in deze dialoog te overdrijven en de elementen vaak te herhalen. Visualiseer de ideeën door bijvoorbeeld een touw te spannen van het ene einde van de klas naar het andere einde. Laat dit in de naburige klas doorlopen… Blijf in volgende lessen deze aspecten van onbegrensd en oneindig herhalen. Deze moeilijke begrippen worden niet verwerkt in één lesuur.



Het symbool ∞

Tot nu toe hebben we vooral het kardinale karakter van oneindig aan bod laten komen, dus 'oneindig' als een maat voor een aantal elementen van een niet eindige verzameling. Soms gebruiken we hetzelfde woord, maar bedoelen we er iets anders mee. Dit is enigszins verrassend voor de leerlingen. Laten we dit illustreren in het volgende voorbeeld. Van zodra een orde in $\mathbb{R}$ is besproken, verschijnen de notaties $[a,b]$ en $]a,+\infty[$ en andere vergelijkbare notaties. We kunnen er op twee manieren mee werken.

- We kunnen ze identificeren op een meetkundige manier met delen van de rechte (de getallenas): een interval en een halve rechte.
- Of we kunnen ze beschouwen als deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ gedefinieerd als volgt:

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$]\mathrm{a},+\infty[\, = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} \mid \mathrm{a} < x\}$$

Hier zijn veel woorden bij nodig. Het symbool $+\infty$ heeft hier als enige betekenis dat het reële getal x willekeurig groot kan worden. Maar let op: *+∞ is geen getal!* Laten we dat in de oren van onze leerlingen knopen. Nochtans zullen we er later in bepaalde contexten vaak mee rekenen, alsof het een getal is. Hoe verwarrend toch voor de leerlingen! In sommige handboeken wordt $]a,+\infty[$ genoteerd met '$]a \rightarrow$', waarbij zeker vermeden wordt om $+\infty$ als een getal te beschouwen. Het overwegen waard dus. We denken dat het belangrijk is dat de elementen uit deze paragraaf expliciet worden besproken met de leerlingen.

2.3. Oneindig durende processen

Het begrip 'oneindig' komt, ook in het secundair, verder nog voor in de context van processen die niet stoppen. Dat dit moeilijk te vatten is voor leerlingen mag ons niet verwonderen. Ook in de geschiedenis van de wiskunde hadden grote geleerden het moeilijk met dit aspect.

Laten we dit illustreren aan de hand van enkele voorbeelden.

Voorbeeld 1

In de eerste graad ontdekken de leerlingen dat ze bij een staartdeling van bijvoorbeeld 13 gedeeld door 7 niet tot een exact resultaat kunnen komen. De leerlingen moeten het deelproces afbreken want de rest is nooit gelijk aan nul. Ze stoppen ergens maar ze beseffen dat dit niet de uitkomst is. Wat is de uitkomst dan wel? We weten hoe ze eruit ziet, we weten dat er een repeterend deel is in het decimaal gedeelte. De theoretische uitkomst bestaat in gedachten maar is niet op te schrijven. Ze bevat oneindig veel decimalen. Dit is het resultaat (de limiet), mochten we het proces inderdaad oneindig lang doorzetten. Het resultaat zelf is niet te vatten. Willen we dit correct beschrijven naar de leerlingen toe, zijn we hen heel veel uitleg verschuldigd… opnieuw: we kunnen zoveel decimalen neerschrijven als we zelf willen, door zoveel stappen in het deelproces uit te voeren als we zelf willen. We zeggen in de wiskunde dat we het aantal stappen van het deelproces 'willekeurig groot' kunnen laten worden. 'Oneindig veel stappen' heeft hier dus de betekenis van 'een willekeurig groot' aantal stappen. De zakrekenmachine kan deze gedachte ondersteunen. Willen we 6 decimalen visualiseren, dan stellen we de machine zo in dat we 6 decimalen krijgen.

Ook $\sqrt{2}$ heeft een decimale ontwikkeling die niet te vatten is. Onze rekenmachine geeft

$$\sqrt{2}=1{,}4142135623731\ldots$$

Dit betekent dat $1 < \sqrt{2} < 2$ en $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ en $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ enz. We kennen $\sqrt{2}$ in een willekeurig (groot) aantal decimalen.

Voorbeeld 2

De leerlingen leren in de tweede graad van het secundair de grafiek kennen van de functie $f(x) = \frac{1}{x}$. Om het asymptotische gedrag te beschrijven gebruiken we op dat ogenblik nog niet de terminologie van limieten, maar toch spreken we in termen van 'als x gaat naar oneindig, dan gaat $f(x)$ naar 0'. En 'als x gaat naar 0, komende van rechts, dan gaat $f(x)$ naar $+\infty$'. Het begrip oneindig heeft hier totaal niets te maken met het 'oneindig' dat ze eerder ontmoet hebben. We rekenen hier op een natuurlijke intuïtie bij de leerlingen die ze onmogelijk juist hebben kunnen ontwikkelen. Beter is om hier dit asymptotisch gedrag van de functie te omschrijven met woorden zoals 'als x willekeurig groot wordt, dan komt $f(x)$ willekeurig dicht in de buurt van 0' of 'we kunnen $f(x)$ zo dicht bij 0 laten komen als we zelf willen, omdat we x willekeurig groot kunnen kiezen' enz. Uitdrukkingen zoals 'willekeurig klein worden' hebben geen duidelijke boodschap: bedoelen we hiermee 'dichtbij 0 komen' of 'naar $-\infty$' gaan? We zijn dus best voorzichtig door deze dubbelzinnigheid.

Samengevat, laten we de leerlingen oefenen om telkens heel duidelijk in woorden te laten omschrijven hoe x en $f(x)$ evolueren. Pas later (in de derde graad) kunnen ze dan hun gedachten bondiger uitdrukken door het woord 'oneindig' te gebruiken, wanneer we zeker zijn dat ze de achterliggende ideeën goed begrepen hebben, dus wanneer het abstractieniveau bereikt is.

Voorbeeld 3

Het getal $0{,}999\ldots$ blijft voor verrassingen zorgen. Vooraleer dit speciale geval besproken wordt, zijn de leerlingen overtuigd dat het kleiner is dan 1. Nadien wordt hen verklaard dat het gelijk is aan het getal 1. Ze leren dit wel, maar vaak blijven ze 'voelen' dat het kleiner is dan 1. Meer zelfs, de meerderheid van de leerlingen blijft nadien gewoon denken dat het een getal is kleiner dan 1. Ze raken er niet aan gewoon. Soms blijken ze gemakkelijker aan te nemen dat het juist 1 is als je $0{,}999\ldots$ herschrijft als 3 maal 0,333, gelijk aan 3 maal $\frac{1}{3}$ en dus 1, of als $1-0{,}000\ldots$

In de derde graad verschijnt het getal opnieuw in de context van meetkundige reeksen: we bespreken er de reeks $\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\cdots$ die niets meer is dan een andere schrijfwijze voor $0{,}999\ldots$ Het is goed mogelijk dat sommige leerlingen denken dat deze som willekeurig groot wordt alhoewel de reeks convergeert naar 1. Het Zeno-paradox-fenomeen blijft vaak de bovenhand hebben: een oneindige som hoeft niet noodzakelijk willekeurig groot te worden, maar de leerlingen voelen het niet. Ook hier leren ze de argumenten te begrijpen, maar worden ze het niet gewoon.

We blijven ervan overtuigd dat we deze moeilijkheden in de klas niet uit de weg moeten gaan. We moeten echter als leerkracht heel waakzaam zijn i.v.m. de hardnekkigheid waarmee leerlingen willen redeneren met de logica van het 'eindige'. We kunnen hen alleen maar blijven confronteren met de paradoxen die eruit voortvloeien, net zoals het in de geschiedenis van de wiskunde is verlopen.

3. Kardinaliteit

Alhoewel kardinaliteit (aantal elementen) van een oneindige verzameling helemaal niet op het leerplan staat van het secundair onderwijs, komen we zoals reeds gezegd het begrip vaak onrechtstreeks tegen, zelfs vanaf het eerste jaar van het secundair. Willen we een aspect van 'oneindigheid' op een juiste manier bespreken, dan kunnen we niet zonder een belangrijk begrip uit de verzamelingenleer, nl. het begrip bijectie. In de sterke richtingen van de derde graad van het GO! is dit een leerplandoelstelling, maar dit begrip lijkt reeds veel vroeger in het curriculum nuttig in de wiskundeopbouw. In de volgende paragraaf beschrijven we een heel natuurlijke manier om dit aspect te bespreken, zonder dat we in abstracte, theoretische uitwerkingen vervallen. Dit kan nooit de bedoeling zijn. Sommige opdrachten of klasgesprekken die in deze paragraaf voorgesteld worden, kunnen al van in de eerste graad gebruikt worden.

3.1. Bijecties

In de eerste les getallenleer in het eerste jaar, leren de leerlingen dat een natuurlijk getal een telresultaat is. Dat is precies wat ze als kleuter ook ervaren hebben bij hun eerste noties over getallen: ze tellen (één, twee) twee eendjes in een vijver, 2 appels in een fruitmand, 2 blokjes in de handen… en al die groepjes van 'twee' leiden tenslotte naar het abstracte begrip 'twee', later met het symbool '2' genoteerd. Een telresultaat is een antwoord op de vraag 'Hoeveel?'. Toch kunnen kleine kinderen met een beperkt getalbegrip ook antwoorden op vragen als 'Zijn er meer, minder, evenveel snoepjes in de twee snoepdozen?' zonder telkens de snoepjes te moeten tellen. Hoe doen ze dat? Net zoals wij hieronder in één oogopslag zien dat er evenveel @'s als ©'s staan.

@ @ @ @ @ @ @ @ @ @ @ @

© © © © © © © © © © © ©

We zien de symbolen in paren staan en hoeven dus niet te tellen.

Met elke @ komt er precies één © overeen en omgekeerd.

In het dagelijks leven is 'afparen' heel nuttig, vaak nuttiger dan tellen. Bijvoorbeeld: elke luchthaven krijgt een afzonderlijke lettercode.

AMS → Amsterdam Airport Schiphol (Nederland)

BCN → Barcelona Airport (Spanje)

BKK → Bangkok International Airport (Thailand)

BRU → Brussels Airport (België)

CDG → Parijs Charles de Gaulle International Airport (Frankrijk)

CRL → Brussels South Charleroi Airport (België)

JFK → John F. Kennedy International Airport (New York, Verenigde Staten)

LHR → Londen Heathrow Airport (Verenigd Koninkrijk)

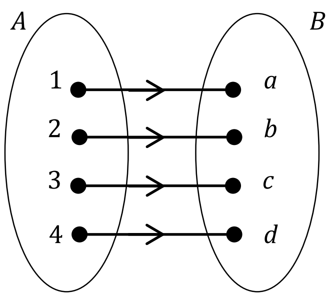
Met elke code komt juist één luchthaven overeen en omgekeerd.

Zo'n verband heeft een naam: er bestaat een *bijectie tussen de verzameling van* luchthavencodes en de verzameling van luchthavens.

We merken op dat het *aantal* codes bijgevolg gelijk is aan het *aantal* luchthavens. Wiskundigen zeggen dan dat beide verzamelingen hetzelfde kardinaalgetal hebben. Voor deze verzamelingen betekent dit gewoon hetzelfde aantal elementen.

Het lijkt ons maar een kleine moeite om bij de aanbreng van de natuurlijke getallen dit afpaar-mechanisme, al dan niet met de term 'bijectie', in oefeningen te verwerken. Het mechanisme opent deuren voor later. Denk maar aan de identificatie van de reële getallen met de punten van een geijkte rechte, het associëren van punten in het vlak met hun coördinaten t.o.v. een gegeven assenstelsel, of het feit dat er geen één-één relatie is tussen de reële getallen en hun sinuswaarden bij de opbouw van de definitie van Bgsin…

Alhoewel de volgende voorstelling wat uit de mode is geraakt in het wiskundeonderwijs, blijkt het toch een heel duidelijke grafische taal te zijn om relaties voor te stellen:



Vanuit elk element van A vertrekt juist één pijl en in elk element van B komt juist één pijl toe.

Het afparen is visueel duidelijk en vertaalt een bijectief verband tussen de twee verzamelingen. In de eerste twee graden kunnen we gerust het begrip 'bijectief verband' vertalen door een 'afpaarmechanisme'. In deze tekst gebruiken we de termen 'afparen' of 'bijectief verband' door elkaar. Ze betekenen hetzelfde.

Paradoxen

Talrijke wiskundigen waren in de knoop met een aantal bemerkingen over het aantal elementen van een verzameling.

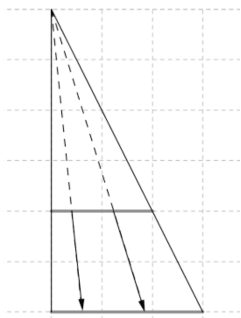
Galilei merkte het volgende op:

0	1	2	3	4	5	…	n	…
↓	↓	↓	↓	↓	↓		↓	
0	1	4	9	16	25	…	n^2	…

Figuur 2

Elk natuurlijk getal heeft een kwadraat en elk kwadraat is precies het kwadraat van één natuurlijk getal. Dat betekent dat er '*evenveel*' kwadraten zijn als natuurlijke getallen. Maar … er zijn toch nog andere natuurlijke getallen dan kwadraten?

Ook de wiskundige Bolzano worstelde in het begin van de 19de eeuw met dezelfde vragen. Hij besloot dat er verschillende soorten oneindig moeten zijn: de oneindigheid van de reële getallen van een lijnstuk van 2 cm lang moet toch kleiner zijn dan de oneindigheid van de reële getallen van een lijnstuk van 3 cm lang? Nochtans kun je de volgende identificatie maken (zie figuur 3):



Figuur 3

Ofwel werkt het 'afpaarmechanisme' niet voor oneindige verzamelingen, ofwel kun je de omvang van oneindige verzamelingen niet vergelijken op deze manier…?

Deze moeilijke en tegenstrijdige bedenkingen ontstaan ook spontaan bij onze leerlingen, omdat ze begrippen en redeneringen gebruiken die in 'het eindige' van toepassing zijn en deze dan toepassen in situaties die niet 'eindig' zijn.

3.2. Aftelbaar oneindige verzamelingen

Dedekind (19^{de} eeuw) hakte de knoop door en definieerde wat een oneindige verzameling precies is:

Een systeem (verzameling) wordt een oneindige verzameling genoemd, als er een één-één verband (afpaarmechanisme, bijectie) kan gevonden worden met een echt deel van de verzameling. (De verzameling zelf en de lege verzameling worden geen 'echte' delen genoemd).

Voor een eindige verzameling is het onmogelijk om een bijectie te vinden met een echt deel ervan. De voorbeelden die Galilei en Bolzano aanhaalden, voldoen echter wel duidelijk aan deze definitie: de verzameling van natuurlijke getallen is af te paren met de verzameling van de kwadraten en is bijgevolg een oneindige verzameling.

Een heleboel intuïtieve vragen rijzen bij iedereen op die hiermee voor de eerste keer wordt geconfronteerd. En dat is ook het geval bij onze leerlingen.

– Kunnen we zeggen dat alle oneindige verzamelingen hetzelfde aantal elementen hebben?
– Zijn er verschillende soorten oneindig?
– Zijn sommige oneindigheden groter dan andere?
– Zijn die 'oneindigheden' ook getallen?
– Kunnen we rekenen met oneindig?

Cantor (einde 19^{de} eeuw), een vriend van Dedekind, boog zich over deze vragen en definieerde het volgende:

Indien er een bijectie bestaat tussen twee verzamelingen noemen we de verzamelingen vanaf nu 'gelijkmachtig'. 'Aantal' elementen van een verzameling wordt nu vertaald met kardinaliteit van de verzameling.

Alle verzamelingen gelijkmachtig met de verzameling van de natuurlijke getallen worden 'aftelbaar oneindig' genoemd. Ze hebben dezelfde kardinaliteit als verzameling van de natuurlijke getallen. We noteren deze kardinaliteit met $\aleph_0$, aleph nul. Aleph($\aleph$) is de eerste letter in het Hebreeuws alfabet.

In symbolen: $\#\mathbb{N} = \aleph_0$

De elementen van de aftelbaar oneindige verzamelingen kunnen we dus op een rijtje zetten; daar zorgt de bijectie met $\mathbb{N}$ voor: een element op plaats 0, een element op plaats 1, een element op plaats 2, enz.

Uit het voorbeeld van Galilei begrijpen we zo dat de verzameling van de kwadraten aftelbaar is.

Tijd om andere aftelbare verzamelingen te ontdekken. Wat gebeurt er als we enkele getallen wegnemen uit $\mathbb{N}$, of er oneindig veel wegnemen of toevoegen? Blijft de verzameling aftelbaar oneindig? De leerlingen worden aan het werk gezet. Mits aanpassing van de terminologie (vermijden van woorden als bijectie, gelijkmachtig en kardinaliteit), kunnen deze opdrachten zeker al in de eerste graad. Patronen herkennen behoort daar trouwens tot één van de doelstellingen.

begin lesactiviteit

Aftelbaar oneindige verzamelingen

1. $\mathbb{N}_0$ is de verzameling van de natuurlijke getallen uitgezonderd 0. Eén element werd dus weggenomen uit $\mathbb{N}$. Zijn er nu minder elementen? Is $\mathbb{N}_0$ gelijkmachtig met $\mathbb{N}$? Indien ja, dan kan de onderstaande tabel ingevuld worden om de elementen van $\mathbb{N}_0$ in lijst te brengen. Zie je een algemeen verband? Is het een bijectie?

$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	⋯	n	
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	⋯
$\mathbb{N}_0$	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	

Vul in: $1, 2, 3 \ldots$ $(n \to n+1)$ *Het is een bijectie. Elk natuurlijk getal wordt op zijn opvolger gestuurd. Elk natuurlijk getal* $\neq 0$ *is het beeld van zijn voorganger.*

2. Stel E is de verzameling van alle even natuurlijke getallen en O is de verzameling van de oneven natuurlijke getallen. Toon aan dat beide verzamelingen aftelbaar zijn door de elementen op te lijsten in onderstaande tabellen. Kun je een algemene formule vinden voor de verbanden? Zijn de verbanden wel degelijk bijecties?

$\mathbb{N}$	E
0	…
1	…
2	…
3	…
⋮	
n	…
⋮	

$\mathbb{N}$	O
0	…
1	…
2	…
3	…
⋮	
n	…
⋮	

E: $(0, 2, 4, 6, \ldots)$ $(n \to 2n)$*; O:* $(1, 3, 5, 6, \ldots)(n \to 2n+1)$*. Beide verbanden zijn bijectief.*

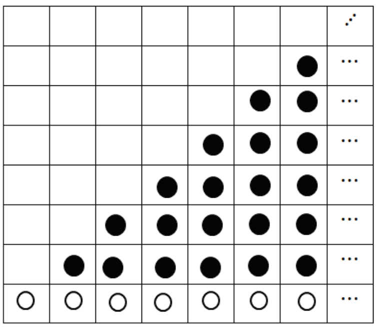
3. We beschouwen nu $\mathbb{Z}$, de verzameling van alle gehele getallen. We hebben dus oneindig veel elementen toegevoegd aan de verzameling van de natuurlijke getallen. De vraag rijst of de kardinaliteit nu wel veranderd is. Denk eraan dat door oneindig veel elementen weg te nemen (probleem 2), we niets gewijzigd hebben aan de kardinaliteit. Het komt er dus op neer om te proberen de gehele getallen in een lijst te plaatsen:

$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$
0	…
1	…
2	…
3	…
4	…
⋮	⋮

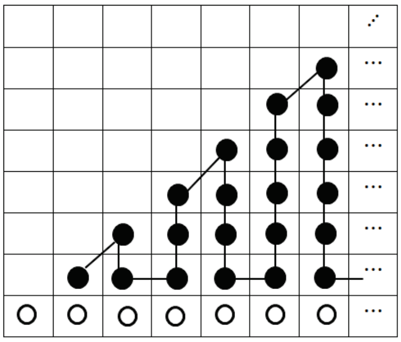
Vul in: $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3 \ldots$

$2n \to -n$ *en* $2n+1 \to n+1$*. De even natuurlijke getallen worden afgebeeld op de negatieve gehele getallen en de oneven natuurlijke getallen op de positieve.*

4. In de volgende figuur loopt het patroon oneindig door naar rechts. Zijn er meer zwarte of meer witte bolletjes? Bouw een redenering op.



Zowel de zwarte bolletjes als de witte bolletjes bepalen aftelbaar oneindige verzamelingen. We moeten een parcours doorheen het rooster van de zwarte bolletjes realiseren, zo dat ook de zwarte bolletjes op een rij kunnen worden geplaatst, net zoals dat reeds met de witte bolletjes is gebeurd. Het parcours in *onderstaande figuur is een mogelijkheid. Het vertrekpunt is het zwarte bolletje links onderaan. Aangezien beide verzamelingen afpaarbaar zijn met ℕ, zijn ze dus ook onderling afpaarbaar. Ze hebben dus hetzelfde kardinaalgetal. De termen 'evenveel', 'meer' of 'minder' zijn niet meer van toepassing.*



5. Geef minstens drie voorbeelden van verzamelingen die aftelbaar oneindig zijn, maar die op een andere wijze worden opgebouwd.

   De verzameling van de priemgetallen; de natuurlijke 4-vouden; alle 5-vouden plus 1.

einde lesactiviteit

We maken een sprong en vragen ons af of de verzameling van de rationale getallen, ℚ, ook aftelbaar oneindig is: is het mogelijk om alle rationale getallen op een rij te plaatsen? Velen zullen intuïtief denken dat dit niet lukt. Er zijn immers heel veel rationale getallen: tussen twee rationale getallen kun je bovendien steeds een nieuw rationaal getal vinden (bijvoorbeeld het gemiddelde van de twee getallen) en bijgevolg zitten er eigenlijk oneindig veel rationale getallen tussen. Zou dit een nieuwe soort van 'oneindig' zijn, groter dan $\aleph_0$? Cantor loste dit probleem op en vond het verrassende resultaat dat ℚ eveneens een aftelbaar oneindig verzameling is. We gieten het denkproces van Cantor in een werkdocument.

begin lesactiviteit

Oneindigheid van ℚ

Cantor had een ingenieus idee om de aftelbaarheid van ℚ te bewijzen. Het is zo eenvoudig dat we het bewijs het best visualiseren. In onderstaande figuur zie je een rooster van de positieve rationale getallen waarbij een parcours aangeduid wordt door een gebroken lijn. Het pijltje duidt aan in welke volgorde we de getallen doorlopen.

	…	…	…	…	…	…	…
	$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$	…
	$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	…
	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	…
	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	…
0	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	…

1. Leg uit hoe je uit deze figuur kunt afleiden dat de verzameling van getallen van dit rooster aftelbaar oneindig is.

Start bij het eerste getal aan het begin van de gebroken lijn, links onderaan. Dit getal komt op de eerste plaats van de lijst en wordt dus geassocieerd met 0*, het volgende getal wordt geassocieerd met* 1*, enz. Zo ontstaat er een bijectie tussen de getallen uit het rooster en* $\mathbb{N}$.

2. Hebben we hiermee ook bewezen dat $\mathbb{Q}$ aftelbaar is? Welke struikelblokken zijn er?

   Er zitten dubbels in; we hebben de negatieve rationalen nog niet beschouwd.

3. Hoe kunnen de gevonden struikelblokken weggewerkt worden zodat de aftelbaarheid van $\mathbb{Q}$ toch op deze manier kan bewezen worden?

   Sla de dubbels gewoon over. Eens je de positieve rationalen geordend hebt, kun je de negatieve ertussen ritsen. Na $\frac{1}{1}$ *komt* $\frac{-1}{1}$*, na* $\frac{2}{1}$ *komt* $\frac{-2}{1}$*...*

einde lesactiviteit

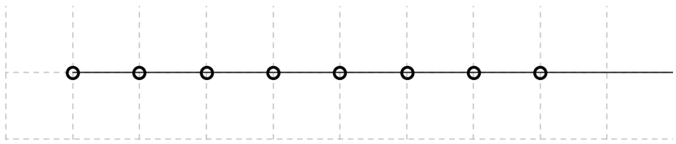
3.3. Overaftelbare verzamelingen

Tot nu toe zijn we maar één soort oneindig tegengekomen. Zowel $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Q}$ zijn aftelbaar oneindig. We gaan na of de verzameling van de reële getallen ook aftelbaar oneindig is. Cantor gaf een heel eenvoudig bewijs om te verklaren dat $\mathbb{R}$ niet aftelbaar is, het diagonaalbewijs. We kunnen het samen met de leerlingen opbouwen.

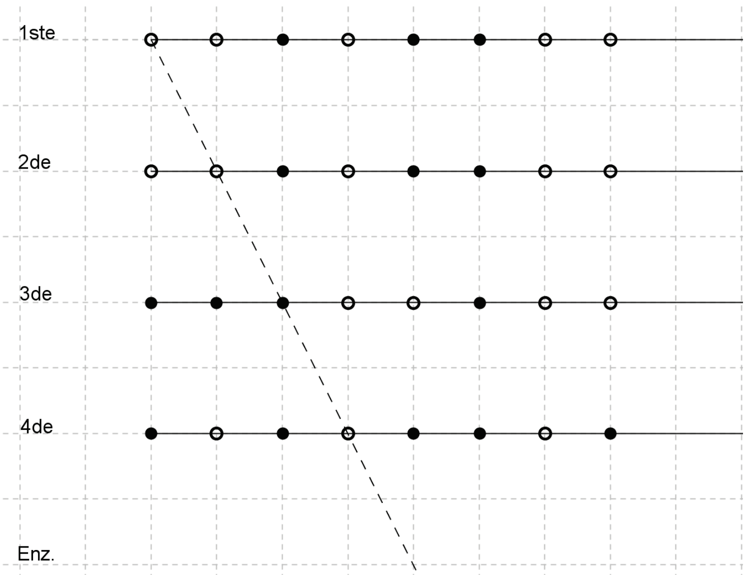
begin lesactiviteit

Niet aftelbaar

1. Beschouw kettingen gemaakt van oneindig veel kralen.



Stel je mag elke kraal kleuren, maar je beschikt maar over twee kleuren, zwart en wit. Nu beschouwen we alle mogelijke gekleurde kettingen zoals hierboven beschreven. Deze verzameling kan niet aftelbaar zijn. Volg de onderstaande redenering, verklaar elke stap en maak de redenering af.



a. Stel we kunnen alle bovenstaande kettingen toch in een oneindige lijst rangschikken.

b. Maak nu een nieuwe ketting als volgt: beschouw de kralen op de stippellijn en verander elke kraal van kleur (wit wordt zwart en omgekeerd). Zo ontstaat er een nieuwe ketting waarvan elke kraal precies de tegenovergestelde kleur heeft als de kralen op de stippellijn.

c. Leg uit waarom deze ketting nooit in de lijst van alle kettingen kan zitten.

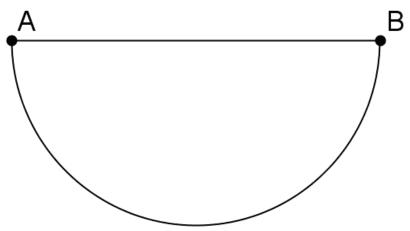
d. Hoe kun je nu besluiten dat de verzameling van oneindig lange kettingen bestaande uit witte en zwarte kralen niet aftelbaar is?

We voeren eigenlijk een bewijs uit het ongerijmde: stel het kan wel dat alle kettingen in een lijst kunnen worden geplaatst, en dat ze bijgevolg een aftelbaar oneindige verzameling zouden bepalen, dan vinden we een contradictie. Mocht een dergelijke lijst bestaan dan blijkt dat er een ketting bestaat die niet in de lijst kan voorkomen, namelijk de ketting gevormd door de kralen met complementaire kleuren van de kralen op de stippellijn. Deze ketting kan niet op de eerste plaats in de rij staan omdat de eerste kraal verschillend is; ze kan niet op de tweede plaats in de lijst voorkomen omdat de tweede kraal verschillend is enz. We kunnen besluiten dat al deze oneindig lange kettingen niet op een rij kunnen geplaatst worden en dus bepalen ze geen aftelbaar oneindige verzameling.

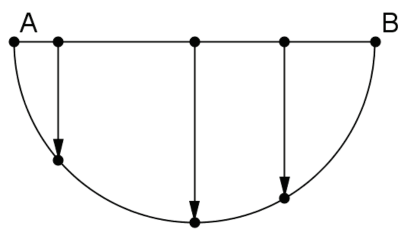
2. Zou je de reële getallen tussen 0 en 1 kunnen identificeren met kettingen met oneindig veel kralen? Hoe? Hoeveel kleuren heb je dan nodig om de kralen te kleuren? Hoe kun je de redenering uit oefening 1 aanpassen om te verklaren dat het interval]0,1[niet aftelbaar is?

De kralen kun je identificeren met de cijfers na de komma van het getal tussen 0 *en* 1*. Elk getal tussen* 0 *en* 1 *heeft oneindig veel decimalen als je toelaat dat je bij de getallen met eindige decimale gedeelten oneindig veel nullen toevoegt. De decimalen kunnen* 10 *waarden aannemen (van* 0 *tot en met* 9*) dus we hebben kralen nodig in* 10 *verschillende kleuren. We passen identiek dezelfde redenering toe: een bewijs uit het ongerijmde. Stel de kettingen kunnen opgelijst worden, dan maken we een ketting die er onmogelijk tussen kan staan. De eerste kraal van de nieuwe ketting is verschillend van de eerste kraal van de eerste ketting in de lijst, de tweede kraal van de ketting is verschillend van de tweede kraal van de tweede ketting uit de lijst, enz., de k^{de} kraal van de ketting is verschillend van de k^{de} kraal van de k^{de} ketting uit de lijst. De nieuwe ketting is dus zo gemaakt dat ze verschillend is van elke ketting uit de lijst.*

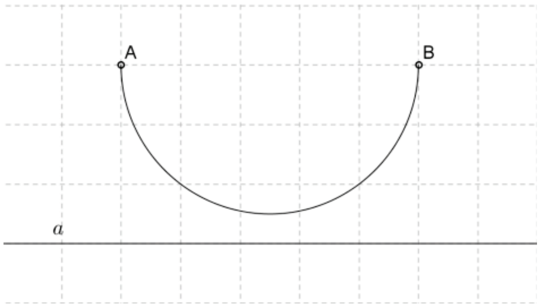
3. Toon aan dat het lijnstuk [AB] gelijkmachtig is met de onderstaande halve cirkel.



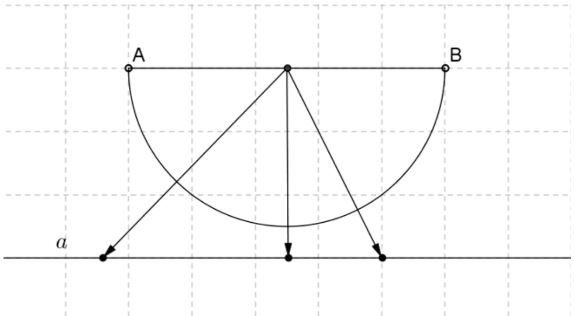
Antwoord: zie de onderstaande tekening.



4. Toon aan dat de halve cirkelboog $\widehat{AB}$, zonder eindpunten, gelijkmachtig is met de rechte a.



De bijectie die de halve cirkel afbeeldt op de rechte is de centrale projectie vanuit het middelpunt van de cirkel. De eindpunten A en B horen er niet bij. Ze kunnen ook niet op een punt van de rechte gestuurd worden door deze projectie.



5. Maak gebruik van de besluiten uit de twee vorige oefeningen om te bewijzen dat de verzameling van reële getallen gelijkmachtig is met elk interval, dus ook met $]0,1[$.

   Het interval $]0,1[$ kan geïdentificeerd worden met het lijnstuk $[AB]$ zonder zijn grenspunten. Dit 'open lijnstuk' kan op zijn beurt via de open halve cirkel geïdentificeerd worden met de rechte a. De rechte a kan na ijking geïdentificeerd worden met de verzameling van de reële getallen. De samenstelling van deze identificaties die overigens allemaal bijecties zijn, maken dat $]0,1[$ gelijkmachtig is met $\mathbb{R}$.

6. Gebruik oefening 5 om te besluiten dat $\mathbb{R}$ niet aftelbaar is.

   Aangezien $]0,1[$ niet aftelbaar oneindig is en $\mathbb{R}$ gelijkmachtig is met $]0,1[$, is $\mathbb{R}$ bijgevolg niet aftelbaar oneindig.

einde lesactiviteit

We hebben nu dus meer dan één soort 'oneindig' ontdekt: aftelbaar oneindig en niet aftelbaar. De kardinaliteit van de natuurlijke getallen is verschillend (kleiner) dan de kardinaliteit van de reële getallen. De vraag die Cantor zich natuurlijk stelde was of er meer soorten oneindig waren dan twee.

Laten we de vraag stellen aan de leerlingen. Ze zullen waarschijnlijk suggereren dat verzamelingen als $\mathbb{Q}^2$ en $\mathbb{R}^2$ (of $\mathbb{C}$) wel heel veel elementen hebben. De resultaten zullen verrassend blijven voor de leerlingen: $\mathbb{Q}^2$ is een aftelbare verzameling en $\mathbb{R}^2$ (of $\mathbb{C}$) is gelijkmachtig met $\mathbb{R}$.

Cantor bewees echter de onthutsende bewering dat er oneindig veel soorten oneindig bestaan: voor elke soort van oneindig kun je een nieuwe 'grotere' maken. Hij bewees dat *de verzameling $\mathcal{P}A$ van alle deelverzamelingen van een verzameling A*, steeds een grotere kardinaliteit heeft dan de verzameling zelf, zowel voor een eindige verzameling als voor een oneindige.

4. Hotel van Hilbert

Een uitstekende context om leerlingen van de derde graad voeling te laten krijgen met bepaalde aspecten van het begrip *oneindig* is het *Hotel van Hilbert*. Dit merkwaardige hotel met oneindig veel kamers werd in januari 1924 door David Hilbert (1862-1943) tijdens een lezing gebruikt als gedachte-experiment om allerlei tegenintuïtieve eigenschappen van het aftelbare te verduidelijken. George Gamov beschreef het hotel in 1947 in het boek *One Two Three ... Infinity.* Sindsdien zijn er talrijke varianten op het thema van het oneindige hotel opgenomen in tijdschriften en boeken en verwerkt in digitale animaties.

David Hilbert is vooral bekend voor de 23 belangrijkste wiskundige problemen voor de 20ste eeuw, die hij in het jaar 1900 voorstelde tijdens het internationale wiskundecongres aan de Sorbonne in Parijs. Het eerste probleem gaat over het aantal elementen (of de *kardinaliteit*) van oneindige verzamelingen. Hilbert uitte het vermoeden dat er geen verzameling bestaat waarvan de kardinaliteit ligt tussen de kardinaliteit van de verzameling van de gehele getallen en de kardinaliteit van de verzameling van de reële getallen. Dit vermoeden, de *continuümhypothese*, komt echter niet aan bod in het verhaal van het oneindige hotel.

In de tekst hieronder presenteren we het Hotel van Hilbert in de vorm van een klassikaal leergesprek. De leerlingen maken hierin kennis met twee verschillende oneindigheden: het *aftelbare oneindig* en het *overaftelbare oneindig*.

We kiezen ervoor om het leergesprek als één doorlopend verhaal te presenteren en niet in vraag- en antwoordvorm. Het zijn immers geen 'opgaven' die de leerlingen moeten 'oplossen'. Het is een gesprek dat niet noodzakelijk identiek hoeft te verlopen aan de beschrijving hieronder.

Zoals je zult merken, overlappen de volgende werkteksten soms met de vorige werktekst voor de tweede graad. Sommige begrippen kunnen immers zowel in de tweede als in de derde graad aan bod komen. Het is niet de bedoeling om deze begrippen twee keer te bespreken. Het tijdstip van het aanbrengen van de begrippen hangt in grote mate af van de wiskundige rijpheid en de interesse van de klasgroep. Merk op dat de overlappende begrippen in de derde graad op een hoger abstractieniveau aangebracht worden.

4.1. Oneindig veel kamers

Ergens hoog in de Zwitserse Alpen stond ooit een hotel, dat zo erg in trek was dat de zaakvoerder besliste het verder uit te bouwen tot een hotel met oneindig veel kamers. Hij noemde zijn etablissement Hotel Infinity.

Zowel de kamers als de zitplaatsen in de eetzaal waren genummerd: 1, 2, 3 ... Het was een zware investering voor de uitbater. Voor de uitbouw van zijn hotel had hij oneindig veel bedden en meubilair nodig, oneindig veel servies en bestek, oneindig veel keukenpersoneel en kamerdienaars, oneindig veel wijnflessen en braadkippen... Maar deze indrukwekkende investering bleek de moeite waard te zijn.

Op een warme zomerdag, toen het hotel helemaal volgeboekt was, meldden er zich drie trekkers aan die niet op voorhand gereserveerd hadden. De uitbater van het hotel maakte echter geen probleem van de ontvangst van deze onverwachte gasten. Hoe zou hij het aan boord gelegd hebben, denk je, om deze drie trekkers een onderkomen aan te bieden?

Antwoorden

Wellicht opperen de leerlingen om meerdere gasten in één kamer te leggen maar er bestaat een elegantere oplossing die de gasten meer privacy gunt. De directeur van het hotel vraagt aan alle vakantiegangers om hun kamer en hun plaats in de eetzaal in te ruilen voor eentje met een volgnummer dat drie hoger is dan het oorspronkelijke. De bewoner van kamer 11 gaat naar kamer 14, die van kamer 1 gaat naar kamer 4 enz. Zo komen de eerste drie kamers vrij voor de nieuwe gasten.

Didactische tips

Dit deel van het verhaal is de uitgelezen plaats om op te merken dat de oneindig vele kamers, stoelen, bedden, soepborden... in gedachte op een rij kunnen gezet worden en kunnen genummerd worden met natuurlijke getallen. Dit is een merkwaardige eigenschap van de oneindige verzameling van de kamers, van de stoelen, van de bedden en de soepborden in Hotel Infinity. Er zijn ook oneindige verzamelingen waarvan de elementen niet op die manier gelabeld kunnen worden. Dit wordt aangetoond in het laatste hoofdstukje van dit verhaal.

We noemen verzamelingen die wel aan deze eigenschap voldoen (of beter: de kardinaliteit van zulke verzamelingen) *aftelbaar oneindig*. Dit aantal wordt kort genoteerd met de Hebreeuwse letter aleph met index nul (of *aleph nul)*: $\aleph_0$.

De leerkracht kan nu een belangrijke eigenschap van het aftelbare oneindig intuïtief aanbrengen, nl. $\aleph_0 + 3 = \aleph_0$. Bij uitbreiding kan nu ook ingezien worden dat aftelbaar oneindig plus een positief geheel getal gelijk is aan aftelbaar oneindig: $\aleph_0 + n = \aleph_0$. Later zal deze eigenschap ook geldig blijken te zijn voor andere oneindige kardinaliteiten.

4.2. Oneindig veel onverwachte gasten

Op een dag stopte er een bus met Franse toeristen aan het hotel. Ze hadden er van gehoord dat er niet op voorhand gereserveerd moest worden in Hotel Infinity en hadden dit dus ook niet gedaan. Toen ze aan het onthaal kwamen, vroeg de receptioniste de reisleider met hoeveel ze waren. Hun aantal bleek op het eerste gezicht problematisch te zijn. De bus telde een (aftelbaar) oneindig aantal zitjes en elk zitje was bezet. Dit scenario had zich nog niet eerder voorgedaan in Hotel Infinity.

De receptioniste riep de hulp in van de hoteleigenaar, die ook ditmaal weer met een briljant idee uit de hoek kwam. Welke strategie denk je dat hij zou gevolgd hebben?

Antwoorden

Er bestaat een heldere manier om elke gast in een aparte kamer op te vangen. Vraag eerst aan de oorspronkelijk gasten om te verhuizen naar een kamer met het nummer dat het dubbele is van hun huidige kamernummer. Alle even kamers worden dus bezet door de oorspronkelijke bewoners. De nieuwelingen kunnen dan probleemloos inschuiven op de oneven nummers. De toerist die in de bus op zitje b zat, mag de kamer met kamernummer $2b - 1$ betrekken.

Didactische tips

De leerlingen zullen wellicht verschillende strategieën vinden om alle onverwachte gasten in het hotel te kunnen opvangen. Sommige strategieën zullen discussie uitlokken omdat de hotelgasten niet in een eindig aantal stappen te weten komen in welke kamer ze geherbergd zullen worden. Ook binnen de redactie van Uitwiskeling was er controverse over een bepaalde schikking waarbij elke nieuwe gast een willekeurige kamer mocht uitkiezen en de achterliggende bewoners mocht vragen één kamernummer op te schuiven.

Bij deze discussie (en ook bij al de vorige) moet het antwoord 'laat de nieuwkomers aansluiten in de kamer na de laatste gast van Hotel Infinity' duidelijk afgekeurd worden. Het woord 'laatste' heeft geen zin meer bij een aftelbaar oneindige verzameling.

Ook na dit deel van het verhaal kan de leerkracht de essentie samenvatten. Dit hoofdstuk maakt de volgende bewerkingen met oneindige kardinaalgetallen plausibel: $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. We kunnen deze bewerking ook noteren als $2 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ of als $\aleph_0 = \frac{\aleph_0}{2}$.

Deze laatste uitspraak lijkt nogal paradoxaal. Je kunt ze ook als volgt interpreteren: er zijn evenveel natuurlijke getallen als even getallen. Nochtans lijken er minder even getallen te zijn dan gehele getallen want elk even getal is een natuurlijk getal maar niet elk natuurlijk getal is een even getal. Deze paradox vertoont gelijkenis met de paradox van Galilei, die we vermeldden in paragraaf 3.

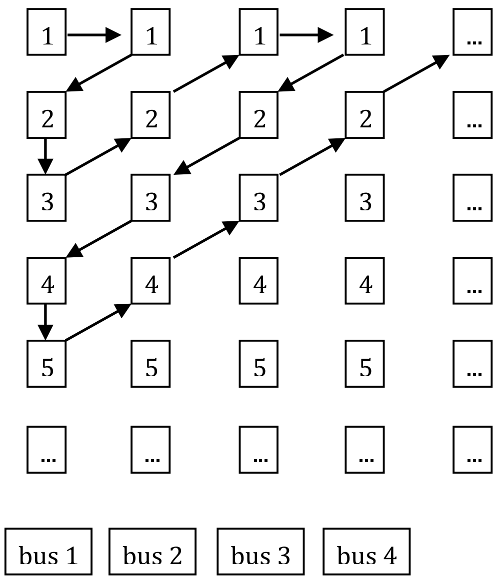
4.3. Oneindig maal oneindig

De gasten in Hotel Infinity begonnen er stilaan tegenop te zien telkens te moeten verhuizen omwille van de toestroom van nieuwe toeristen. Ze vervloekten de inventieve oplossingen voor de overbevolking van de uitbater en hoopten stiekem op een catastrofe waar de inventiviteit van de eigenaar niet tegen opgewassen was.

De verlossing leek bij verrassing al na enkele dagen te komen. Er arriveerde een aftelbaar oneindig lange colonne van bussen met telkens een aftelbaar oneindig aantal zitplaatsen op de parking van het hotel. De bewoners van Hotel Infinity keken monkelend toe en verheugden zich op de slechte afloop van dit verhaal. Maar de manager van het hotel was niet onder de indruk van de oneindig keer oneindig veel nieuwkomers en gaf ze allen onderdak. Hoe denk je dat hij dit probleem oploste?

Antwoorden

Bij deze episode van het verhaal worden de leerlingen werkelijk uitgedaagd originele oplossingen te bedenken. We zullen hier niet verder ingaan op de vondsten van onze eigen leerlingen, die vaak wat moeilijk onder woorden te brengen zijn, maar we stellen hier twee klassieke argumentaties voor die aantonen dat alle toeristen samen in het hotel kunnen. Beide redeneringen zijn staaltjes van creativiteit die de leerlingen niet onthouden kunnen worden.



Figuur 5 De slingerlijn tussen de nieuwkomers

De eerste argumentatie is die van de *slingerlijn*. Vraag aan alle oorspronkelijk gasten om te verhuizen zo dat hun kamernummer verdubbeld is. Alle kamers met oneven nummer komen dan leeg te staan. Laat de Franse toeristen daarna uit de bus stappen en laat hen op evenwijdige rijen plaatsnemen naast hun bussen. De autobussen rijden nu weg. De eerste persoon van de eerste bus steekt de hand uit naar de eerste persoon van de tweede bus. Die steekt op zijn beurt de hand uit naar de tweede persoon van de eerste bus enz. Zo vormen de passagiers van al deze bussen een slingerlijn waarin elkeen een plaats heeft, zie figuur 5. Als de slingerlijn rechtgetrokken wordt, kunnen de nieuwe gasten één na één het hotel binnenwandelen en kunnen ze plaatsnemen in de oneven kamers. In de techniek van de slingerlijn herkennen we het aftelbaarheidsargument van $\mathbb{Q}$ uit paragraaf 3.2.

Een tweede bewijsmethode steunt op de unieke priemontbinding van de natuurlijke getallen. Zo kunnen we bijvoorbeeld het natuurlijke getal 28512 op een unieke manier schrijven als het product $2^5 \cdot 3^4 \cdot 11^1$ van machten van de priemfactoren 2, 3 en 11. De nieuwe strategie bestaat er nu in om de bestaande gasten naar buiten te laten gaan en alle nieuwelingen een kamer toe te wijzen volgens de formule p_n^b, waarbij n het nummer is van het zitje in de bus, p_n het n^{de} priemgetal en b het busnummer. Bijvoorbeeld, de passagier die op de derde plaats zit van de bus met volgnummer zes, zoekt eerst het derde priemgetal ($p_3 = 5$) en verheft dit getal tot de zesde macht ($b = 6$). Zo vindt hij zijn kamernummer: 15625. Deze kamer moet hij met niet delen met een andere gast want het getal 15625 kan maar op één manier geschreven worden als macht van een priemgetal. Uiteraard zullen er grote leegten zijn tussen de kamers van de nieuwkomers. Alleen de kamernummers die een macht zijn van een priemgetal, duiden een kamer aan die bewoond is door een nieuweling. De oorspronkelijke bewoners kunnen nu makkelijk inschuiven in de open plekken tussen de bewoonde kamers.

Didactische tips

Hier vestigt de leerkracht nog eens extra de aandacht op de kerngedachte, nl. $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$. Deze gelijkheid is best verwonderlijk. Er blijken nu immers evenveel natuurlijke getallen te liggen op de getallenlijn als koppels van natuurlijke getallen in het vlak. Nochtans kun je je de roosterpunten op een rechte inbeelden als een deelverzameling van de roosterpunten in een vlak.

De leerkracht kan de leerlingen de opdracht geven alternatieve bewijzen op het internet op te zoeken voor de aftelbaarheid van aftelbaar oneindig maal aftelbaar oneindig. Een andere klassieker die snel op wikipedia gevonden wordt, is bijvoorbeeld de interleaving-methode waarbij het kamernummer ontstaat door het busnummer en het zetelnummer cijfersgewijze door elkaar te vlechten, bijvoorbeeld zetelnummer 159 en busnummer 045 geven samen het kamernummer 105495.

Tot hiertoe is het verhaal van Hotel Infinity erg bevattelijk. Het laatste hoofdstuk echter kan je alleen maar kwijt in klassen die redeneer- en taalsterk zijn. Zelf kondig ik de laatste episode (die hooguit tien minuten duurt) wel eens aan als een afvalwedstrijd waarin de leerlingen zo lang mogelijk moeten proberen in het zadel te blijven (en de redenering moeten proberen te volgen). Een beetje zoals een rodeowedstrijd.

4.4. Oneindig veel daklozen

Enkele weken voor kerst waren de bewoners van Hotel Infinity het verhuizen zat. Ze besloten de uitbater een hak te zetten door een aantal nieuwe gasten uit te nodigen dat werkelijk groter was dan het aantal kamers in het hotel. Alleen zo zou de eigenaar de storende herschikkingen van de kamers misschien stopzetten.

Het plan was ambitieus. De bewoners namen zich voor comités te vormen, zoveel als ook maar mogelijk. Alle denkbare comités van twee personen kwamen aan bod. Maar ook alle comités van acht personen moesten een vergadering houden. En alle mogelijke comités van één persoon enz... Zelfs het lege comité moest vergaderen. Om zeker te zijn dat er genoeg comités waren, werd er beslist dat ook alle mogelijke aftelbaar oneindige comités moesten samenkomen, bijvoorbeeld het comité van de gasten met een kamernummer dat een geheel veelvoud van 7 is.

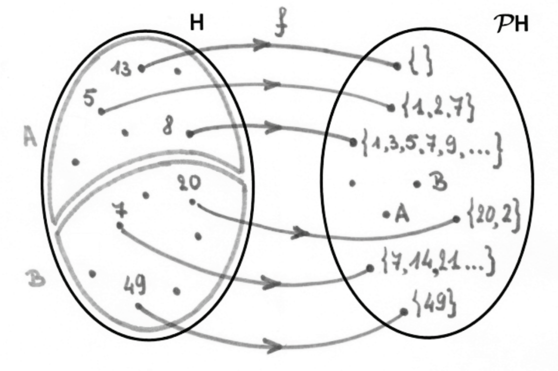
Elk van deze comités had de opdracht een dakloze van straat te plukken en hem een kerstdiner aan te bieden in het hotel. Daarna moest deze dakloze een kamer in het hotel toegewezen krijgen. Dit waren de spelregels. Het kleinste comité had evenwel een probleem met het kiezen van een dakloze en een kamer voor deze dakloze. Daarom werd overeenkomen dat het lege comité de zieke dakloze zou uitnodigen die gisteren overnachtte in het kerkportaal en dat die zou ondergebracht worden in kamer 1.

Op deze manier zou het de bewoners vast lukken de hoteleigenaar te slim af te zijn en het hotel uit de voegen te laten barsten. Kun je zelf een redenering opbouwen die aantoont dat de daklozen met teveel zijn voor het Hotel Infinity?

Antwoorden

Het is erg onwaarschijnlijk dat de leerlingen op eigen houtje kunnen bewijzen dat de daklozen met teveel zijn. Maar het volgen en begrijpen van het bewijs is voor een aantal leerlingen wel haalbaar. Bovendien is het een echter klassieker onder de wiskundige bewijzen. Het is een bewijs uit het ongerijmde.

We stellen dat de daklozen wél in het hotel kunnen worden ondergebracht. Dit leidt tot een contradictie, die pas duidelijk wordt na een moeizame redenering. De verzamelingenleer geeft hierbij een steuntje in de rug. Voor de leerlingen is dit een voorbeeld van de kracht van de abstractie. De context heeft in dit bewijs geen belang meer. De redeneringen die we volgen zijn louter verzamelingtheoretisch.



Figuur 6 H is niet gelijkmachtig met 𝒫H.

Noem de verzameling van de hotelbewoners H en de verzameling van de alle comités uit het hotel $\mathcal{P}H$. De notatie $\mathcal{P}H$ wordt in de verzamelingenleer gebruikt voor de machtsverzameling van H (Engels: Power of H, Nederlands: $\mathcal{P}$ van H), dit wil zeggen: de verzameling van alle deelverzamelingen van H. Vanaf nu zullen we de verzameling van alle comités dus beschouwen als de machtsverzameling van H. We moeten bewijzen dat de verzameling H niet gelijkmachtig is met $\mathcal{P}H$.

Stel, uit het ongerijmde, dat de verzameling H wel gelijkmachtig is met de verzameling $\mathcal{P}H$. Dit betekent dat er een bijectie f bestaat van H naar $\mathcal{P}H$. In figuur 6 zie je hier een voorbeeld van. Deze bijectie f is volkomen willekeurig en heeft niets meer met het verhaal van het hotel te maken.

Sommige elementen x van H worden door f afgebeeld op een deelverzameling van H die x bevat. In het voorbeeld hierboven zijn dat de elementen 7, 20, 49, ... Andere elementen x van H worden door f afgebeeld op een deelverzameling van H die x niet omvat. In figuur 3 zijn dit 5, 8, 13, ... Op deze manier wordt de verzameling H in twee klassen onderverdeeld:

$$A = \{x \in H \mid x \notin f(x)\};$$

$$B = \{x \in H \mid x \in f(x)\}.$$

De verzamelingen A en B overdekken H volledig en hebben geen overlapping, m.a.w. elke $x \in H$ behoort precies tot één van beide verzamelingen van de overdekking. In de verzamelingenleer noemen we $\{A, B\}$ een partitie van de verzameling H en noemen we A en B de partitieklassen.

We gebruiken de verzameling A om tot een contradictie te komen. Vermits A tot de verzameling $\mathcal{P}H$ behoort en f een bijectie is van H naar $\mathcal{P}$H, bestaat er een $x \in H$ zo dat $f(x) = A$. Dit element x behoort ofwel tot A ofwel tot B. Hier knelt het schoentje:

- als $x \in A$ dan kunnen we volgens de definitie van A besluiten dat $x \notin f(x)$; omdat $f(x) = A$ volgt hieruit dat $x \notin A$;
- als $x \notin A$ dan is $x \in B$ en dan kunnen we volgens de definitie van B besluiten dat $x \in f(x)$; omdat $f(x) = A$ volgt hieruit dat $x \in A$.

We vatten samen: als $x \in A$ dan $x \notin A$ en als $x \notin A$ dan $x \in A$. Uit deze tegenspraak volgt dat H niet gelijkmachtig is met $\mathcal{P}H$. Er kan geen afparing gebeuren tussen de verschillende comités (of de daklozen) en de bewoners van Hotel Infinity (of de kamers van dit hotel). Het hotel is dus ronduit te klein om alle zwervers onderdak te geven.

Didactische tips

Dit type van redeneringen komt wel vaker voor in de wiskunde, bijvoorbeeld om aan te tonen dat de verzameling van alle verzamelingen niet bestaat. Mocht de verzameling van alle verzamelingen bestaan dan kun je deze verzameling opsplitsen in twee complementaire deelverzamelingen: de verzameling van de verzamelingen die zichzelf wel bevatten en de verzameling van de verzamelingen die zichzelf niet bevatten enz.

Uit de laatste episode van het verhaal van het oneindige hotel kunnen we onthouden dat het aantal deelverzamelingen van een aftelbaar oneindige verzameling groter is dan aftelbaar oneindig. We noteren dit aantal als $2^{\aleph_0}$ of als $\aleph_1$. Het is niet zo moeilijk aan te tonen dat $\aleph_1$ het kardinaalgetal is van de verzameling $\mathbb{R}$. De notatie $2^{\aleph_0}$ is overgenomen vanuit de eindige verzamelingen. Voor een eindige verzameling A met kardinaalgetal $\#A$ is het aantal deelverzamelingen gelijk aan $2^{\#A}$.

Wat we echter niet kunnen aantonen is dat $\aleph_0$ en $\aleph_1$ de 'kleinste' transfiniete getallen (zo worden deze oneindige kardinaalgetallen genoemd) zijn. Niemand kan aantonen dat er tussen $\aleph_0$ en $\aleph_1$ nog andere oneindige kardinaalgetallen zitten. Niemand ook kan aantonen dat er tussen $\aleph_0$ en $\aleph_1$ geen andere oneindige kardinaalgetallen meer zitten. Deze onbeslisbaarheid is moeilijk te begrijpen voor de gewone wiskundige. Kurt Gödel (1940) en Paul Cohen (1963) brachten de ideeën samen voor het bewijs dat het bestaan van transfiniete getallen tussen $\aleph_0$ en $\aleph_1$ een onbeslisbare kwestie is binnen de spelregels van de verzamelingenleer.

De zoektocht naar nog grotere kardinaalgetallen getallen stopt niet bij $\aleph_1$. Als we alle deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ bundelen in een nieuwe verzameling dan heeft deze verzameling weer een hogere kardinaliteit, namelijk $2^{\aleph_1}$ of $\aleph_2$. Op deze manier kunnen we eindeloos doorgaan met het definiëren van nieuwe transfiniete getallen.

Wellicht zal een groot gedeelte van de klas een inspanning geleverd hebben dit verhaal tot het einde toe te kunnen volgen. Bij de leerlingen die onderweg afhaakten, blijft waarschijnlijk wel de fascinatie voor het begrip oneindig hangen. Leerlingen die meer willen weten over dit onderwerp, kunnen doorverwezen worden naar boeiende lectuur zoals Hemmings & Tahta (1995) en Burger & Starbird (2005).

5. Onbepaaldheden

Een andere invalshoek voor het bestuderen van het begrip oneindig situeert zich in de analyse van het vijfde jaar. De leerlingen hebben in de tweede graad al kennis gemaakt met asymptoten van standaardfuncties (zie ook paragraaf 2.3). Dit was een bewuste opstap naar het invoeren van het begrip oneindig in het vijfde jaar.

Bij deze nieuwe benadering verschijnt oneindig niet meer als een kardinaalgetal maar wel als een limiet van een rij of van een functie. Telkens wanneer het begrip oneindig in deze context gebruikt wordt, denken we nu aan bijvoorbeeld $\lim_{n\to\infty} 2^n$ of aan $\lim_{x\to\infty}(x^2+1)$. In deze interpretatie krijgen uitdrukkingen als $(+\infty)+(+\infty)=(+\infty)$ een heel andere betekenis dan in het verhaal van Hilbert.

Deze gelijkheid betekent nu dat voor willekeurige rijen u_n en v_n geldt dat:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \text{ en } \lim_{n\to\infty} v_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(u_n + v_n) = +\infty$$

en dat voor willekeurige reële functies f en g geldt dat :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \text{ en } \lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to\infty}(f(x)+g(x)) = +\infty\,.$$

Deze *dynamische interpretatie* leidt tot rekenregels met $+\infty$ zoals

$$\begin{aligned}(+\infty)+2&=(+\infty)\\(+\infty)+(+\infty)&=(+\infty)\\2(+\infty)&=(+\infty)\\(+\infty)\cdot(+\infty)&=(+\infty)\end{aligned}$$

maar ook tot rekenregels met $-\infty$ zoals

$$\begin{aligned}(-\infty)+2&=(-\infty)\\(-\infty)+(-\infty)&=(-\infty)\\2(-\infty)&=(-\infty)\\(-\infty)\cdot(-\infty)&=(+\infty).\end{aligned}$$

Onbepaaldheden

Heel wat bewerkingen met oneindigheden kunnen niet eenduidig geïnterpreteerd worden vanuit deze nieuwe invalshoek. We denken hier in de eerste plaats aan $(+\infty)-(+\infty)$ en aan $\frac{+\infty}{+\infty}$ maar ook aan de bewerkingen $0\cdot\infty$, $(+\infty)^0$ en 1^∞. Hun waarde hangt af van de keuze van de rijen u_n en v_n of van de keuze van de functies f en g. We noemen deze bewerkingen *niet gedefinieerd* of *onbepaald*.

Om volledig te zijn, merken we op dat er ook nog onbepaalde uitdrukkingen bestaan waarin de oneindige grootheden $+\infty$ en $-\infty$ hun hoofdrol afstaan aan het getal 0. Het zijn de uitdrukkingen $\frac{0}{0}$, 0^0. De eerste van deze onbepaaldheden is de belangrijkste. Ze duikt op bij de afgeleide in een punt (als limiet van een differentiequotiënt).

Voor de meeste leerlingen is het zeer moeilijk onbepaaldheden te onderscheiden van bepaaldheden zoals $\frac{0}{\infty}$, $\frac{5}{\infty}$, ∞^1 en 0^∞. Daarom moeten we voldoende aandacht besteden aan de intuïtieve voorspelling van de mogelijke waarden van allerhande onbepaaldheden (zie verderop). In een volgende fase moeten de leerlingen ook onbepaaldheden kunnen aantonen via een geschikte keuze van rijen of functies (zie verderop).

Intuïtieve benadering van onbepaaldheden

We focussen ons nu even op de onbepaaldheid $(+\infty) - (+\infty)$. Deze uitdrukking is voorlopig niet gedefinieerd. Telkens wanneer er in het verleden nieuwe getallen werden ingevoerd, werd er over gewaakt dat de rekenregels zo goed mogelijk in overeenstemming waren met bestaande definities en rekenregels. Ook nu moeten we een definitie voor $(+\infty) - (+\infty)$ kiezen die compatibel is met gekende rekenregels. Als je de leerlingen vraagt om een afspraak voor te stellen die hieraan voldoet, kan je ruwweg drie antwoorden verwachten.

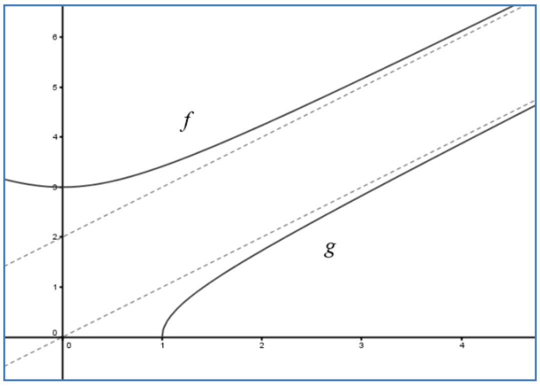
1. Voor een willekeurig reëel getal r geldt dat $r - r = 0$. Als we deze rekenregel uitbreiden naar oneindigheden, zou de afspraak $(+\infty) - (+\infty)$=0 zeer verantwoord kunnen zijn.
2. De rekenregel $(+\infty) - r = +\infty$, die geldig is voor willekeurige reële getallen r, zou ook uitgebreid kunnen worden naar oneindige getallen. Op deze manier zou de uitdrukking $(+\infty) - (+\infty) = +\infty$ als nieuwe rekenregel ingevoerd kunnen worden.
3. Een andere rekenregel die de leerlingen kennen, is $r - (+\infty) = -\infty$. Deze regel geldt enkel voor reële getallen r maar niets belet ons om hem te verbreden naar oneindigheden. Er zijn dus ook argumenten om $(+\infty) - (+\infty) = -\infty$ als nieuwe rekenregel te aanvaarden.

Deze drie voorstellen zijn even waardevol. Bij zulke dilemma's (in dit geval trilemma's) spreken wiskundigen van een onbepaaldheid. Om dubbelzinnigheden te vermijden moet de notatie $(+\infty) - (+\infty)$ binnen berekeningen vermeden worden.

Een andere manier om de onbepaaldheid $(+\infty) - (+\infty)$ te laten aanvoelen is de visuele. Op de afbeeldingen hieronder zie je de grafieken van functies f en g zo dat

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \text{ en } \lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty.$$

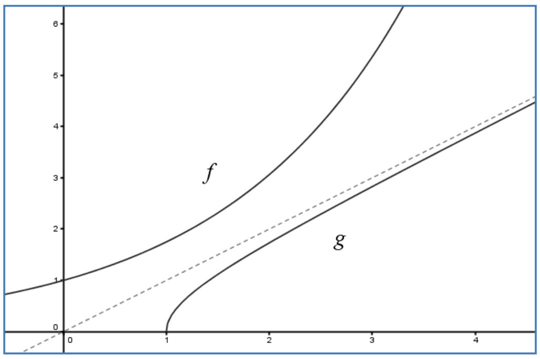
Je kunt de leerlingen vragen welke waarde ze verwachten voor $\lim_{x\to\infty}(f(x) - g(x))$ en waarom.



Figuur 7

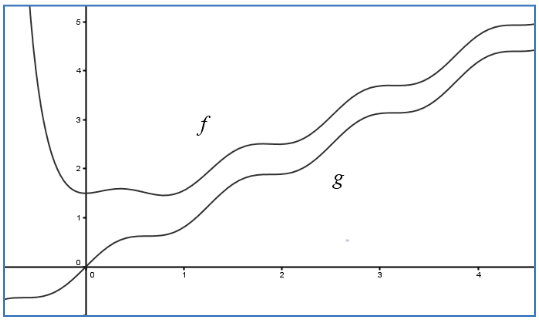
In het voorbeeld van figuur 7 kunnen de leerlingen aflezen dat $\lim_{x\to\infty}(f(x) - g(x)) = 2$. Hiervoor kunnen ze de volgende intuïtieve argumenten aanvoeren. Hoe groter de waarde van x wordt, hoe meer de (raaklijnen aan de) grafieken parallel lijken te lopen. De grafieken f en g stijgen na verloop van tijd even snel want de asymptoten van deze twee functies zijn evenwijdig. Deze asymptoten hebben een 'verticale tussenafstand' gelijk aan 2.

In het voorbeeld van figuur 8 kunnen de leerlingen argumenteren dat $\lim_{x\to\infty}(f(x) - g(x)) = +\infty$ tot de mogelijkheden behoort. De functies f en g gaan beide naar $+\infty$ voor groeiende x-waarden. Maar de grafiek van f stijgt vanaf een bepaalde x-waarde veel sneller dan die van g. Hierdoor zal de 'verticale tussenafstand' tussen beide grafieken oneindig groot worden.



Figuur 8

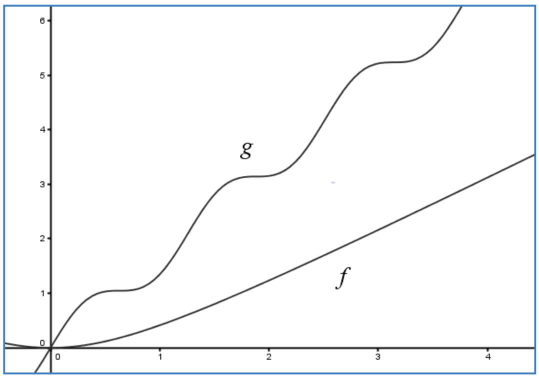
De grafieken van de functies f en g in figuur 9 vertonen geen schuine asymptoten. De beide grafieken gaan wel naar oneindig voor groter wordende x-waarden, zij het op een schommelende wijze.



Figuur 9

Ook in dit voorbeeld kunnen de leerlingen een uitspraak doen over de limiet van de verschilfunctie. De 'verticale tussenafstand' tussen de grafieken lijkt hier stilaan naar een constante waarde te streven. Daarom kunnen de leerlingen in dit geval vermoeden dat $\lim_{x\to\infty}(f(x)-g(x))$ gelijk is aan een constante (in de buurt van 0,5).

Het voorbeeld van figuur 10 heeft iets weg van het tweede voorbeeld. De 'verticale tussenafstand' tussen de beide grafieken wordt oneindig groot. Echter, de rollen van de functies f en g zijn hier omgewisseld. Hierdoor besluiten we dat $\lim_{x\to\infty}(f(x)-g(x))=-\infty$.



Figuur 10

Een gelijkaardige intuïtieve aanpak kan gevolgd worden voor alle andere onbepaaldheden. Let op bij de onbepaaldheid 1^∞. De formulering van dit trilemma is iets moeilijker onder woorden te brengen.

Benadering van onbepaaldheden met rijen en functies

Algebraïsch argumenteren dat een bepaalde uitdrukking met oneindigheden onbepaald is, is een vaardigheid die mooi aansluit bij de calculus in de derde graad.

Je kunt best één onbepaaldheid samen met de leerlingen uitwerken, bijvoorbeeld $(+\infty)-(+\infty)$, en de overige onbepaaldheden uitbesteden als werk voor thuis.

Hieronder zie je enkele invullingen van de onbepaaldheid $(+\infty)-(+\infty)$ in het kader van veeltermfuncties. Elke limietberekening heeft een ander resultaat.

1. Beschouw de functies $f(x)=x^2+5$ en $g(x)=x^2+1$. Door de hoogstegraadseentermfunctie onder de loep te nemen, vinden we dat:

   $$\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty \text{ en } \lim_{x\to\infty} g(x)=+\infty.$$

   De verschilfunctie van deze twee functies is een constante functie: $(f-g)(x)=4$. In dit voorbeeld is de limiet van de verschilfunctie:

   $$\lim_{x\to\infty}(f-g)(x)=4.$$

2. Kiezen we de graden van f en g ongelijk dan krijgen we een ander resultaat. Stel bijvoorbeeld dat $f(x)=x^3+x^2$ en $g(x)=x^2+4$ dan vinden we:

   $$\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty \text{ en } \lim_{x\to\infty} g(x)=+\infty.$$

   De verschilfunctie heeft nu als voorschrift $(f-g)(x)=x^3-4$ waaruit we afleiden dat

   $$\lim_{x\to\infty}(f(x)-g(x))=+\infty.$$

3. Indien we de rollen van f en g omkeren, d.w.z. als $f(x)=x^2+4$ en $g(x)=x^3+x^2$ dan vinden we nog steeds dat:

   $$\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty \text{ en } \lim_{x\to\infty} g(x)=+\infty.$$

   Ditmaal is de functie $(f-g)(x)=-x^3+4$. De hoogstegraadsterm leert ons dat:

   $$\lim_{x\to\infty}(f(x)-g(x))=-\infty.$$

Na dit klassikale voorbeeld is het voor de leerlingen niet erg moeilijk meer om aan te tonen dat $\frac{\infty}{\infty}$ onbepaald is. Ze kunnen opnieuw veeltermfuncties kiezen voor f en g. Door te spelen met de graden van deze veeltermfuncties, vinden ze al snel verschillende limieten voor de quotiëntfunctie $\frac{f}{g}$.

Voor de onbepaaldheid $0\cdot\infty$ zal wellicht gebruik gemaakt worden van de rationale functie $f(x)=\frac{1}{x}$ die naar 0 gaat voor x naar $+\infty$.

Misschien moet er wel een handje toegestoken worden bij de onbepaaldheid ∞^0. Goede keuzes voor de functies f en g kunnen gevonden worden bij de exponentiële functies, vb:

1. $f(x) = 3^x$ en $g(x) = \frac{2}{x}$ met $f(x)^{g(x)} = 3^2$
2. $f(x) = 3^{x^2}$ en $g(x) = \frac{1}{x}$ met $f(x)^{g(x)} = 3^x$
3. $f(x) = 3^x$ en $g(x) = \frac{1}{x^2}$ met $f(x)^{g(x)} = 3^{\frac{1}{x}}$.

De onbepaaldheid 1^∞ geeft de leerkracht de mogelijkheid de leerlingen kennis te laten maken met het getal e, dat hier als een limiet geïntroduceerd wordt. In de onderstaande voorbeelden zullen algebraïsche technieken vaak niet meer volstaan om de limiet te berekenen. Een numerieke benadering met de zakrekenmachine is hier aangewezen. Alleen het derde voorbeeld hieronder kan uitgewerkt worden zonder gebruik te maken van de zakrekenmachine.

1. $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ en $g(x) = x$ met $f(x)^{g(x)} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
2. $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ en $g(x) = 2x$ met $f(x)^{g(x)} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$
3. $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ en $g(x) = 2x$ met $f(x)^{g(x)} = 3^2$.

Het kan geenszins de bedoeling zijn dat de leerlingen deze voorbeelden uit het hoofd leren. Het doel is wel de inventiviteit en het inzicht van de leerlingen te prikkelen, zo dat ze zelf in staat zouden zijn snel onderscheid te maken tussen bepaaldheden en onbepaaldheden.

Onbepaaldheden omzeilen via gepaste limiettechnieken

Bij de berekening van limieten komt het vaak voor dat leerlingen het werk stopzetten wanneer ze op een onbepaaldheid stuiten. Ze zijn er zich dan te weinig van bewust dat deze limiet wel bestaat maar dat er nader onderzoek nodig is om uit de onbepaaldheid te geraken. Er bestaat bij het berekenen van limieten niet zoiets als onbeslisbaarheid. Onbepaaldheden kunnen omzeild worden door gepaste rekentechnieken.

Bij een eerste kennismaking moeten de leerlingen er attent op worden gemaakt dat het arsenaal aan technieken om onbepaaldheden te omzeilen enorm groot is. Tot enkele decennia geleden was het een expliciete doelstelling binnen de analyse om deze technieken zo goed mogelijk te beheersen. Nu kunnen limieten algebraïsch berekend worden door CAS-rekenmachines en computerprogramma's. Toch is het zinvol om van bij de start enkele voorbeelden te geven van een limietberekening waarbij wat meer inventiviteit nodig is om een onbepaaldheid te omzeilen, bijvoorbeeld

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to10} \frac{x^2 - 100}{\sqrt{x-1} - 3} \\
&= \lim_{x\to10} \frac{(x-10)(x+10)\left(\sqrt{x-1}+3\right)}{\left(\sqrt{x-1}-3\right)\left(\sqrt{x-1}+3\right)} \\
&= \lim_{x\to10} \frac{(x-10)(x+10)\left(\sqrt{x-1}+3\right)}{(x-10)} \\
&= \lim_{x\to10} (x+10)\left(\sqrt{x-1}+3\right) \\
&= 120
\end{aligned}$$

Een ander misverstand bij limietberekeningen is dat leerlingen niet de limiet van de hele functie ineens berekenen maar dat ze een deel van de functie voortrekken bij de limietberekening. Als in het vorige voorbeeld de teller voorgetrokken wordt, loopt het slecht af zoals in de volgende berekening.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to10} \frac{x^2 - 100}{\sqrt{x-1} - 3} \\
&= \lim_{x\to10} \frac{100 - 100}{\sqrt{x-1} - 3} \\
&= \lim_{x\to10} 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

6. Oneindige sommen en oneigenlijke integralen

In de derde graad komen er nog verschillende andere contexten aan bod waarbij het begrip oneindig tegenintuïtieve reacties uitlokt. Ook hier moet bijzondere zorg besteed worden aan een goede interpretatie van het begrip oneindig.

6.1. Oneindige sommen

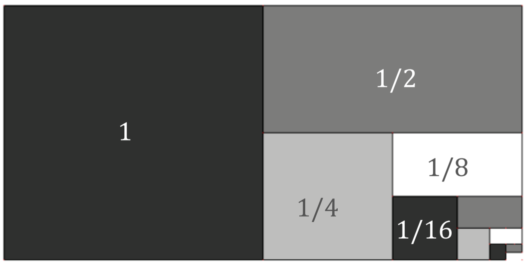
De oude Grieken hadden het er moeilijk mee te aanvaarden dat een oneindige som van positieve getallen eindig kon zijn. Dit is onder andere de kern van de paradoxen van Zeno.

In het vijfde jaar maken de leerlingen kennis met de som van rekenkundige en meetkundige rijen. De somformule voor n opeenvolgende termen van een meetkundig rij

$$s_n = t_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

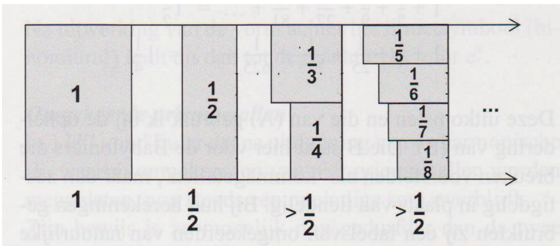
toont aan dat de meetkundige reeks (of de rij van de partieelsommen) convergeert, dit wil zeggen dat s_∞ een eindig getal is, als en slechts als de reden q tot het interval]-1, 1[behoort. Op deze manier wordt de klassieke overtuiging dat ‘de som van oneindig veel positieve getallen oneindig is’ duidelijk tegengesproken.

Dat de rij $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \dots$ een eindige som heeft, kun je ook makkelijk op een meetkundige manier inzien door tegels en delen van tegels samen te leggen. Als je alle oppervlakten van de tegels in figuur 11 bij elkaar telt, kun je de oppervlakte van twee tegels zo dicht benaderen als je wilt en zal de oppervlakte van twee tegels niet overschreden worden.



Figuur 11 Totale oppervlakte is twee tegels

Een andere rij waarvan de oneindige som soms tot misverstanden leidt, is de harmonische rij. Nicolas Oresme (1323-1382) toonde al in de veertiende eeuw aan dat de bijbehorende reeks (of de rij van de partieelsommen) divergeert. Dit wil zeggen dat de oneindige som s_∞ van de termen van de harmonische rij oneindig is. Ook van dit bewijs kunnen we een meetkundige visualisatie geven, zie figuur 12.



Figuur 12 Totale oppervlakte is oneindig groot

Deze twee reeksen, de convergerende meetkundige reeks en de divergerende harmonische reeks, zouden tot de standaardkennis van heel wat leerlingen moeten behoren. We hoeven in deze gevallen zelfs geen zware wiskunde in te zetten om de convergentie en divergentie aan te tonen.

Voor heel wat andere reeksen is het minder evident te kunnen voorspellen of er convergentie of divergentie is. Laten we de proef op de som nemen. Wat denk je zelf van de volgende reeksen? Welke uitdunning van de harmonische reeks convergeert? Welke divergeert?

1. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \frac{1}{36} + \frac{1}{45} + \cdots$
2. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \frac{1}{81} + \cdots$
3. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \frac{1}{40320} + \cdots$
4. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{23} + \cdots$

Neem even de tijd om hierover na te denken, beste lezer. De eerste reeks bevat de omgekeerden van de driehoeksgetallen, de tweede reeks bestaat uit de omgekeerden van de kwadraten, reeks drie heeft de faculteiten van natuurlijke getallen in de noemers en reeks vier de priemgetallen.

Zonder in te gaan op bewijzen, geven we hieronder een kort antwoord op deze vraag. Wil je meer weten over uitdunningen van harmonische reeksen dan verwijzen we naar Kindt (2008).

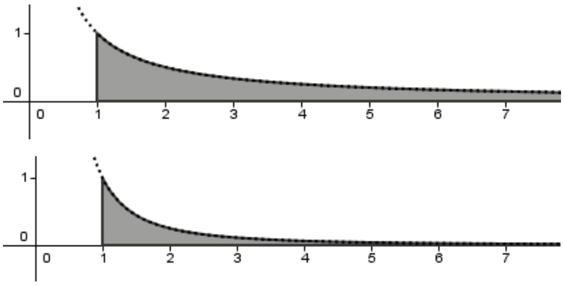
De reeks van de reciproken (omgekeerden) van de driehoeksgetallen is genoeg uitgedund om te convergeren. Ook de reeks van de reciproken van de kwadraten convergeert. Het is makkelijk aan te tonen dat deze reeks convergeert (de rij van de kwadraten wordt immers gemajoreerd door de rij van de driehoeksgetallen) maar het is veel moeilijker om aan te tonen naar welk getal ze convergeert. Het was Euler die als eerste aantoonde dat deze oneindige som gelijk is aan $\frac{\pi^2}{6}$. In het vorige nummer van Uitwiskeling gaven we hier een bewijs van, in de bespreking van Aigner & Ziegler (2013). De reeks met de reciproken van de faculteiten is ook voldoende uitgedund. Ze convergeert naar $e - 1$. Maar de reeks met de omgekeerden van de priemgetallen is niet voldoende uitgedund. Je zou in dit opzicht kunnen zeggen dat er meer priemgetallen zijn in de hoge regionen dan kwadraten, driehoeksgetallen of faculteiten. De vierde reeks divergeert dus. Als je van de priemgetallen alleen de priemtweelingen overhoudt dan is de reeks opnieuw voldoende uitgedund om te convergeren. Deze zeer merkwaardige vondst werd pas in 1919 bewezen (door de Noorse wiskundige Viggo Brun). De reeks convergeert naar de constante $1{,}902160583104 \dots$ die sinds de ontdekking de naam van de constante van Brun draagt.

De moeilijke voorspelbaarheid van de convergentie van sommen zet zich door naar continue sommen of integralen.

6.2. Oneigenlijke integralen

Het is bekend dat integralen van functies over een oneindig domein soms een eindige waarde hebben. Dit houdt verband met wat we ontdekten over oneindige sommen.

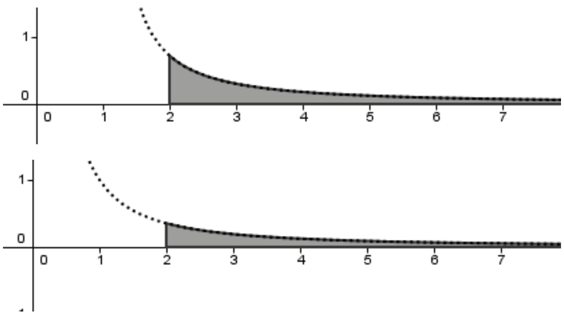
De convergentie van oneigenlijke integralen is geen verplichte leerstof. Als je de grafiek van een functie met de x-as als horizontale asymptoot bekijkt, kun je je intuïtie laten oordelen over de convergentie van de oneigenlijke integraal. Grafieken met een 'zware staart' hebben een divergerende oneigenlijke integraal, functies met een 'lichte staart' hebben een convergerende integraal. De begrippen 'zware staart' en 'lichte staart' worden ook gebruikt in de statistiek.



Figuur 13 Dikke en slanke staarten

In figuur 13 zien we de grafieken van de functie $f(x) = \frac{1}{x}$ (zware staart) en van de functie $g(x) = \frac{1}{x^2}$ (lichte staart). Bij de eerste functie zal de integraal over het interval $[1, +\infty[$ divergeren. Bij de tweede functie convergeert de integraal naar 1. Dit is volstrekt in de lijn van de sommen van de rijen: de rij $u_n = \frac{1}{n}$ divergeert, de rij $v_n = \frac{1}{n^2}$ convergeert.

Het is een leuke oefening om het gebied tussen de zware en de lichte staarten af te tasten. Wat denk je bijvoorbeeld van de functies $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ en $g(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$, zie figuur 14. Gebruik voor deze oefening bij voorkeur een integratie over het interval $[2, +\infty[$. Stemt je berekening overeen met je intuïtie?



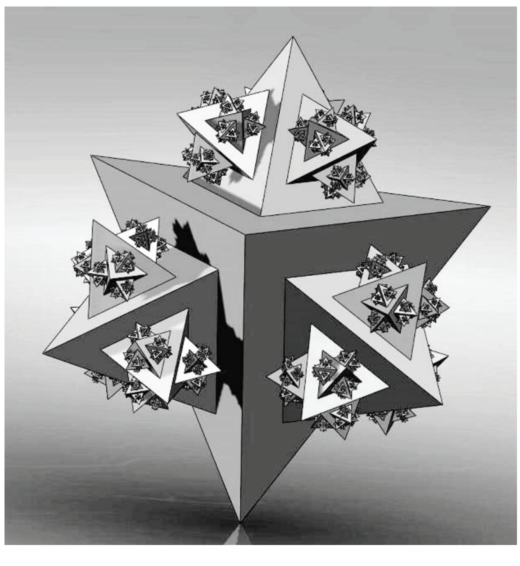
Figuur 14 Opnieuw zware en lichte staarten

6.3. De trompet van Torricelli

Mocht je op het einde van het zesde jaar nog een keer terug willen komen op het begrip oneindig en op de schijnbare paradoxen die dit begrip met zich meebrengt, dan moet je het zeker hebben over verschijnselen zoals de trompet van Torricelli, zie ook Uitwiskeling 7/1, 4-15.

Als je aan de leerlingen vraagt of het mogelijk is met een vlies met een eindige oppervlakte een oneindige inhoud af te bakenen dan antwoorden ze vast negatief. Ze denken dan misschien aan het bolvormige zeepvlies, dat er om bekend staat met een vaste oppervlakte een maximaal volume aan lucht te omspannen. En dat is een goede redenering. De bol is het lichaam met de grootste inhoud voor een vaste oppervlakte of anders uitgedrukt met de kleinste oppervlakte voor een vaste inhoud.

Als je de leerlingen vervolgens vraagt of er lichamen bestaan met een eindige inhoud en een oneindige oppervlakte, blijft het meestal stil in de klas. Best te begrijpen: deze lichamen liggen niet zomaar voor het rapen. De meest bekende voorbeelden van deze lichamen vind je bij de fractalen. Hieronder zie je bijvoorbeeld de planeet van Koch (zie Sweeny, 2008), een lichaam dat bestaat uit een tetraëder waarop 4 kleinere tetraëders gekleefd zijn, waarop telkens weer 3 kleinere tetraëders gekleefd zijn enz. De figuur is zodanig opgebouwd dat ze zelfgelijkvormig is. Dit betekent dat, wanneer je een klein pinakeltje van deze constructie afbreekt en wanneer je dit vergroot, je in essentie het oorspronkelijke lichaam terug krijgt.



Figuur 15 De planeet van Koch

Op het internet vind je talrijke grafische ontwerpen van driedimensionale zelfgelijkvormige lichamen. We noemen zelfgelijkvormige objecten fractalen.

De fractaal die je in figuur 15 'ziet' heeft een eindige inhoud en een oneindige oppervlakte. Het werkwoord 'zien' is hier misschien wat kort door de bocht. De afbeelding toont slechts tetraëders van acht verschillende formaten. De echte planeet van Koch heeft oneindig veel verschillende afmetingen van tetraëders. Je kunt je de volledige fractaal wel inbeelden maar je kunt hem niet afbeelden.

Een even gek object als de planeet van Koch is de trompet van Torricelli (1608-1647), genoemd naar de uitvinder van de barometer, Evangelista Torricelli. Een andere naam voor deze trompet is de hoorn van Gabriël. De aartsengel Gabriël blies hierop op de Dag des Oordeels en maakte hiermee een symbolische link van het eindige naar het oneindige, van het aardse naar het goddelijke. De moderne leerling zal het object van figuur 16 eerder een 'vuvuzela' noemen.

De trompet van Torricelli ontstaat door de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{x}$ te laten wentelen om de x-as voor $x \in [1, +\infty[$. Op het eerste gezicht lijkt de oneindig lange bazuin, die zo ontstaat, niet veel gemeen te hebben met de planeet van Koch.

Maar als je dieper doordenkt, zie je toch een gelijkenis: de trompet van Torricelli is een fractaal. Geen gekartelde, zoals je ze meestal aantreft, maar een gladde. Als je een deel van de trompet bekijkt, bijvoorbeeld het gedeelte waarvoor $x \in [2, +\infty[$ dan kan dit uiteinde affien afgebeeld worden op de hele trompet.

Verrassend wordt het echter wanneer je de oppervlakte en de inhoud van deze bazuin berekent. De inhoud is vrij eenvoudig:

$$I = \lim_{p \to +\infty} \int_1^p \pi \cdot f^2(x) \mathrm{d}x$$

$$= \lim_{p \to +\infty} \left[\frac{-\pi}{x} \right]_1^p = \pi$$

Als we als lengte-eenheid de dm nemen, betekent dit dat je de hele trompet kunt vullen met iets meer dan 3 liter vloeistof. De vloeistof zit dan zo diep in de trompet als je je maar kan inbeelden.

Voor de berekening van de oppervlakte is wat meer vastberadenheid nodig. De integraal die je hiervoor moet berekenen is:

$$A = \lim_{p \to +\infty} \int_1^p 2\pi f(x) \cdot \sqrt{1 + f'^2(x)} \mathrm{d}x$$

$$= \lim_{p \to +\infty} \int_1^p \frac{2\pi}{x^3} \sqrt{1 + x^4} \mathrm{d}x.$$

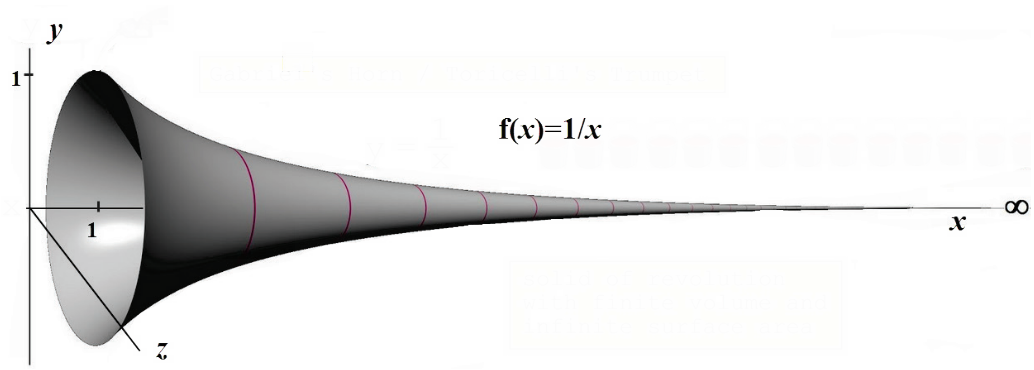
Deze integraal is niet geschikt om manueel berekend te worden. Je kunt je leerlingen wel laten berekenen dat:

$$D\left(\pi\left(\ln\left(\sqrt{1+x^4}+x^2\right) - \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}\right)\right)$$

$$= \frac{2\pi}{x^3}\sqrt{1+x^4}.$$

Met deze primitieve functie kunnen ze aan de slag om de oppervlakte van de trompet te berekenen. Goed geraden: het resultaat is oneindig.

Ben je niet zo'n fan van zware integraalberekeningen dan bestaat er een geraffineerde sluipweg:



Figuur 16 De trompet van Torricelli

$$
\begin{aligned}
A &= \lim_{p\to+\infty}\int_1^p 2\pi f(x)\cdot\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x\\
&> \lim_{p\to+\infty}\int_1^p 2\pi f(x)\mathrm{d}x\\
&= \lim_{p\to+\infty}\int_1^p \frac{2\pi}{x}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

waarbij deze laatste integraal naar oneindig gaat omwille van een functie met een te zware staart. De oppervlakte-integraal is bijgevolg ook gelijk aan oneindig.

Deze berekeningen vragen om een luchtige ontknoping in de klas. Je vertelt de leerlingen dat, als je deze trompet aan de binnenkant en aan de buitenkant zou willen schilderen, je oneindig veel potten verf nodig hebt. Een dure aangelegenheid dus.

Daarna vertel je hen dat je een listige manier ontdekt hebt om de trompet toch te kunnen schilderen met een eindig aantal potten verf, binnen een eindig aantal werkuren met een eindig aantal klusjesmannen. Meer nog, je zal zelfs maar zes literpotten verf nodig hebben plus een klein likje.

De werkwijze klinkt misschien een beetje surrealistisch maar dat stoort de wiskundige niet. Om de verf aan te brengen ga je niet te werk met een schilderskwast maar je giet π liter verf in de trechter. Zoals we berekend hebben, zit de trechter dan precies vol. Daarna giet je de trechter weer leeg. Een dunne film verf zal op de binnenwand van de trompet blijven kleven. Zo is de binnenkant al geschilderd. Omdat de binnen- en buitenwand van de trompet dezelfde oppervlakte hebben, zal je met 2π liter verf de trompet langs binnen en buiten kunnen schilderen.

Deze paradox zal wel wat discussie in de klas losmaken. Dat deed ze zelfs op de redactievergadering van Uitwiskeling. Een deel van de leerlingen zal ervan overtuigd zijn dat de integraalberekeningen fouten bevatten. Een ander deel zal bezwaren hebben tegen het schilderen van bijvoorbeeld het klaslokaal door ramen en deuren te sluiten en daarna het lokaal vol verf te gieten.

Deze laatste groep heeft het bij het rechte eind. Het schilderen door het vullen met verf lukt wel met een klaslokaal maar niet met de trompet. We nemen immers stilzwijgend aan dat ‘schilderen’ betekent ‘bedekken met een verflaag met een vast dikte’. Als je een oneindige oppervlakte bedekt met een verflaag met een vaste dikte dan is de verfinhoud oneindig.

Sommige leerlingen zullen hier opmerken dat je bij het schilderen rekening moet houden met de fysische structuur van de verf, die bestaat uit verfmoleculen. Je zal π liter verf dus nooit in de trompet kunnen gieten want vanaf een zekere x_0 is de trompet dunner dan de diameter van een verfmolecule en zal de verf dus ‘blijven steken’. In ieder geval kun je de binnenwand van de trompet niet met een verflaag met een vaste dikte beschilderen...

Met deze redeneeroefening kun je de kritische ingesteldheid van zesdejaarsleerlingen bij de overstap van SO naar HO mooi testen.

7. Namijmeren over grote getallen en relevantie van het begrip oneindig

Doe de test: vraag iemand om het begrip 'oneindig' in een zin te plaatsen en negen keer op tien wordt er gezegd "het heelal is oneindig". En dan bedoelt men eigenlijk "er komt geen einde aan, het is onbegrensd". Het voorbeeld is heel treffend, omdat men in de geschiedenis van de wetenschap hierover al heel lang gefilosofeerd heeft. Wetenschappelijk onderzoek is er echter nog steeds niet uit.

Aristoteles had het over potentiële oneindigheden en feitelijke oneindigheden. Met de idee van de eerste soort zijn we enigszins vertrouwd: we kennen voorbeelden zoals de lijst van natuurlijke getallen 1, 2, 3, … die nooit eindigt, of we kunnen ons inbeelden dat sommigen dromen van 'onbeperkt reizen in een ruimteschip doorheen een oneindige ruimte'; de reis stopt niet. Het 'oneindige' wordt hier nooit volledig ervaren, het is potentieel. De tweede soort is moeilijker: is er bijvoorbeeld in de natuur iets 'meetbaar oneindig' op een bepaalde plaats, of op een bepaald ogenblik? Dit is een heel natuurlijke vraag, ook bij leerlingen. Komt 'oneindig' voor in de realiteit? Volgens Aristoteles was dat onmogelijk. Wat volgt is geen diepgaande uitwerking van mogelijke theorieën, waarvoor wij (auteurs) trouwens geen expertise hebben, noch een onderbouwde filosofische verhandeling. We geven enkele voorbeelden die eerder bedoeld zijn voor het geval er in de klas een aanzet gegeven wordt, of om domeinen buiten de wiskunde even te betreden. Laten we de leerlingen duidelijk maken dat er nog veel onzekerheden zijn, en dat zinnen zoals 'het heelal is oneindig' voorlopig geen wetenschappelijke waarheid inhouden. Bovendien is die zin heel ruim. Bedoelen we dat het aantal atomen oneindig groot is (het kardinale aspect), of dat we willekeurig ver kunnen reizen in de ruimte?

Enkele voorbeelden:

- In de natuurkunde gebeurt het dat je in theoretische berekeningen 'oneindig' uitkomt, maar dan gaat het steeds over resultaten die verkregen worden door het verwaarlozen van een aantal beginsituaties.
- Einsteins theorie van algemene relativiteit geeft aan dat het uitdijend heelal gestart is in een eindig verleden, ongeveer 14 miljard jaar geleden, toen de densiteit ervan oneindig groot was. Dit kennen we onder de 'Big Bang'-theorie. Einstein berekende ook dat in het centrum van een zwart gat een oneindige densiteit van materie zou bestaan. Sommige wetenschappers beweren echter dat dit artefacten zijn in een evoluerende wetenschap. Mochten de fenomenen bestaan, zijn ze zeker niet observeerbaar omdat de zwarte gaten alle licht absorberen.
- We komen terug op onze startzin i. v. m. de mogelijke ruimtelijke oneindigheid van het heelal. Indien dit niet zo zou zijn, dan rijzen er onmiddellijk nieuwe vragen: zou dit dan willen zeggen dat de ruimte een rand heeft, of, wat ligt er dan buiten de grenzen? We kunnen ons echter wel meetkundige modellen inbeelden, zoals een sfeer, die wel degelijk een eindige oppervlakte hebben, maar die toch geen rand hebben. Einstein gaf aan dat de meetkundige vorm van de ruimte trouwens afhankelijk is van de dichtheid van de materie die het bevat (een beetje zoals een voorwerp plaatsen op een rubberen trampoline). Daardoor is het niet duidelijk wat de vorm van de ruimte precies is en of ze al dan niet onbegrensd is.
- Is het aantal deeltjes in het heelal dan een oneindige verzameling? Het aantal atomen wordt naar verluidt geschat tussen de 10^{78} en 10^{85}. Zeer grote getallen dus, maar voorlopig niet 'oneindig groot'.

We begeven ons op gevaarlijk terrein: een foute identificatie van heel grote getallen met het begrip 'oneindig'. Als we tijd nemen om te filosoferen over 'oneindig' is het even zinvol om ons even te buigen over het nut van 'grote' getallen.

- Een googol is een enorm groot getal (10^{100}): een 1 gevolgd door 100 nullen. Het is een getal dat in de wiskunde en andere wetenschappen vaak opduikt als vergelijkingspunt: het is bijvoorbeeld groter dan het aantal deeltjes in het heelal… Op zich heeft het geen nut. Het is echter nog te bevatten; we kunnen het zelfs neerschrijven.
- Een googolplex is (10^{googol}) is eveneens een getal dat opduikt in de wiskunde als nieuw referentiepunt; het is bijvoorbeeld groter dan het grootste priemgetal dat recent ontdekt is: het 48ste Mercenne-priemgetal is $2^{57885161} - 1$, een getal met 17425170 cijfers. Grote priemgetallen hebben hun nut onder andere in de codetheorie.

- Het Graham-getal is het grootste getal dat tot op heden in een wiskundige redenering gebruikt is geworden. Het is een natuurlijk getal groter dan de googolplex. Er is in het ganse universum onvoldoende materie aanwezig om dit getal te kunnen neerschrijven. Erger nog, we kennen de cijfers niet: het is een geheel getal, deelbaar door 3 en eindigend op een 7. Veel concreter kunnen we het niet beschrijven. Toch heeft het een zinvolle betekenis, omdat het gebruikt is geworden in een wiskundige redenering. Grotere getallen bestaan theoretisch natuurlijk wel, maar hun nut in de realiteit moet nog blijken.

We willen met dit laatste hoofdstuk Vlaanderen niet aanzetten om te filosoferen over het begrip ‘oneindig’. We beogen alleen maar dat indien leerlingen tijdens de lessen wiskunde filosofische uitspraken maken en die uitspraken zouden beschouwen als wetenschappelijke feiten, we erop kunnen wijzen dat de wetenschap op vele vlakken nog open ligt. Het theoretische aspect van ‘oneindig’ in wiskundige uitwerkingen is echter wel relevant. Bovendien: heel grote getallen en ‘oneindig’ is niet hetzelfde.

Slotbeschouwing

Het begrip ‘oneindig’ heeft verschillende facetten, die we dagelijks in onze wiskundelessen tegenkomen. Die verschillende betekenissen kunnen heel verwarrend zijn voor de leerlingen. ‘Oneindig binnen wiskunde’ heeft ook weinig te maken met het woordgebruik in onze dagelijkse taal. Het is in deze loep niet de bedoeling geweest ‘oneindig’ als een leerdoel op zich te beschouwen. We wilden eerder aansporen om de gelegenheden te benutten om misconcepties en spraakverwarringen te vermijden. Die gelegenheden zijn talrijk. Wie ruimte heeft om er wat dieper op in te gaan, kan gebruik maken van de opdrachtjes.

Bronnen

Aigner, M., Ziegler, G. (2013). *Raisonnements divins*, Springer-Verlag, France, 49-55.

Barrow, J.D. (2005). *The infinite book*. London: Vintage books.

Barrow, J.D. (2012). *Does infinity exist?* Geraadpleegd 11.11.2014. http://plus.maths.org/content/does-infinity-exist

BBC. (2010). *To infinity and beyond*. Horizon (film).

Burger, E.B., Starbird M. (2005). *The Heart of Mathematics*. Key College Publishing.

Freiberger, M., Thomas, R. (2013). *Do infinity exist in nature?* Geraadpleegd 11.11.2014. http://plus.maths.org/content/do-infinities-exist-nature-0

Freiberger M., Thomas R. (2014). *Too big to write but not too big for Graham*. Geraadpleegd 11.11.2014. http://plus.maths.org/content/too-big-write-not-too-big-graham

Hemmings R., Tahta D. (1995). *Images of Infinity*, Stradbroke, Norfolk: Tarquin Publications.

Kindt M. (2008). *Wat 40 keer te bewijzen is*. Freudenthal Instituut, Utrecht, 79-81

Lamua A. (2013). *Het boek der oneindigheid*. Kerkdriel: Librero b.v.

Mastin, L. (2009).*The physics of the universe.* Geraadpleegd 11.11.2014. http://www.physicsoftheuniverse.com/numbers.html

Sweeney J. (2008). *3D Koch Snowflake.* Geraadpleegd 11.11.2014. http://blog.3dvision.com/2008/10/30/3d-koch-snowflake/

van den Broek L., van Rooij A. (2007). *Blik op oneindig*. Zebra-reeks. Utrecht: Epsilon Uitgaven.

George Pólya, *Let us teach guessing*

MAA Video Classics number 1, The Mathematical Association of America, 1966, http://vimeo.com/48768091

Deze film zag ik enkele jaren geleden op een congres. Ik vond het heerlijk om de legendarische Hongaarse wiskundige George (eigenlijk: György) Pólya, die ik enkel kende als auteur van boeken over problem solving (Pólya, 1945, 1954), in levende lijve bezig te zien. De film oogt een beetje gedateerd, maar is inhoudelijk nog helemaal actueel. Pólya neemt in rustig de tijd om samen met een groep studenten een wiskundig probleem aan te pakken en ondertussen zijn ideeën over heuristieken en problem solving uit te leggen. Toen ik onlangs ontdekte dat deze film ook online beschikbaar is, besloot ik om jullie, lezers, te laten meegenieten. Ga er comfortabel bij zitten, want de film duurt een heel uur.

De film

In een inleidend woordje van achter zijn bureau, geeft de 76-jarige Pólya een korte uiteenzetting over zijn visie op het wiskundeonderwijs. Wiskundeles geven is voor hem leerlingen de kans geven om ontdekkingen te doen. Eerst moeten ze de gelegenheid krijgen om beredeneerd te gokken, daarna pas moeten ze proberen te bewijzen. (“First guess, then prove.”)

Dan zien we hem voor een klasje van een twintigtal studenten met typische jaren-60-looks. Hij legt hen uit dat ze ‘reasonable guesses’ zullen moeten wagen. Mocht iemand van hen toevallig het antwoord op het probleem al op voorhand kennen, dan mag die niet antwoorden. Maar wie het antwoord niet kent, wordt aangemoedigd om vrijuit te durven raden.

Hij stelt het volgende probleem.

> *In hoeveel gebieden verdelen vijf vlakken de ruimte?*

Verschillende studenten wagen een gok: 25, 32, 10 gebieden. Hij noteert deze antwoorden op het bord.

Het probleem is niet zomaar meteen te beantwoorden, anders was het geen ‘probleem’. Hij stelt voor om *eenvoudigere problemen* te bedenken, die een goede voorbereiding zijn voor dit probleem. De studenten stellen voor om met een kleiner aantal vlakken te beginnen. Samen vindt de klas de volgende eenvoudige resultaten.

> 1 vlak verdeelt de ruimte in 2 gebieden.

> 2 vlakken verdelen de ruimte in 4 gebieden.

Een studente onderbreekt: “Als die twee vlakken evenwijdig zijn, dan zijn er maar drie gebieden.” Ze krijgt een pluimpje voor deze zeer goede opmerking. Hij geeft toe dat de vraag bewust nog onvolledig geformuleerd was. De vijf vlakken moeten ‘willekeurig’ zijn: niet evenwijdig, niet allemaal door één punt... Het lijstje wordt aangevuld.

> 3 vlakken verdelen de ruimte in 8 gebieden.

Een belangrijk aspect van ‘reasonable guessing’ is ook denken aan *extreme gevallen*. Daarom vult hij het lijstje aan met:

> 0 vlakken verdelen de ruimte in 1 gebied.

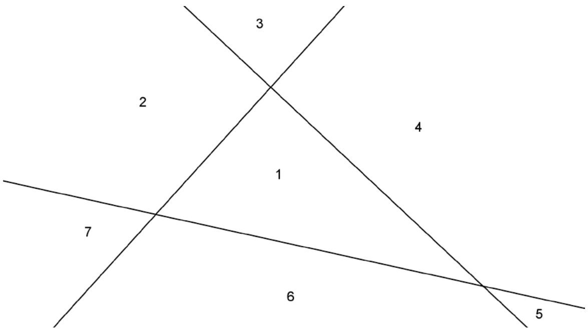
Voor vier vlakken gokken de studenten op 16 gebieden, een redelijke gok gebaseerd op de observatie van een *patroon*: de opeenvolgende machten van 2. Met deze gok hebben de studenten dit patroon verdergezet. Pólya vergelijkt dit met *inductie* in de natuurwetenschappen.

Is het aantal ‘16’ nu bewezen? De studenten antwoorden in koor: ‘neen’. Je moet niet alleen gokken, je moet je gok ook in twijfel trekken en controleren. Het is niet zo gemakkelijk om je vier willekeurige vlakken in de ruimte in te beelden. Daarom stelt hij een *analogie* voor: rechten in het vlak in plaats van vlakken in de ruimte.

> 1 rechte verdeelt het vlak in 2 gebieden.

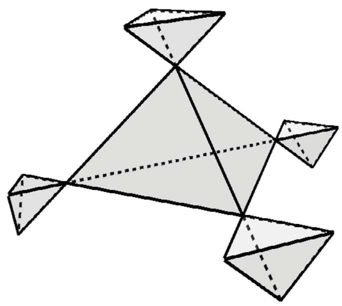
> 2 rechten verdelen het vlak in 4 gebieden.

> 3 rechten verdelen het vlak in 7 gebieden (figuur 1).



Figuur 1

Eén van deze gebieden is begrensd. Analoog bepalen vier vlakken in de ruimte een begrensd ruimtelichaam: een viervlak. Hij heeft een kartonnen viervlak meegebracht, alsook een tekening van een viervlak waarvan de zijvlakken doorlopen (figuur 2).



Figuur 2

Een student legt uit dat er nu 15 gebieden zijn. Omdat niet alle studenten deze uitleg kunnen volgen, grijpt Pólya terug naar de vlakke situatie: daar is één gebied de begrensde driehoek; drie gebieden grenzen aan zijden en drie gebieden hebben enkel een hoekpunt gemeen met de driehoek. Op dezelfde manier heb je bij vier vlakken in de ruimte: 1 begrensd gebied (het viervlak), 4 gebieden die grenzen aan de zijvlakken, 6 gebieden die grenzen aan de ribben en 4 gebieden die enkel een hoekpunt gemeen hebben met het viervlak. In totaal zijn er dus $1 + 4 + 6 + 4 = 15$ gebieden. Je kunt je afvragen waar het 16de gebied naartoe is: de eerste drie vlakken verdelen, wanneer ze toegevoegd worden, elk van de 'vorige' gebieden in twee, maar voor het vierde vlak is dit blijkbaar niet het geval. Pólya benadrukt: een beredeneerde gok kan fout zijn.

Een student merkt op: in het vlak, dat tweedimensionaal is, "loopt het al mis" (met de machten van 2) vanaf drie rechten; in de ruimte, die driedimensionaal is, loopt het mis vanaf vier vlakken. Pólya noemt dit een intelligente conjectuur.

Hij wil de analogie nog uitbreiden. De ruimte verdelen met vlakken; het vlak verdelen met rechten: nog een stap eenvoudiger is een rechte verdelen met punten. De tabel die intussen op het bord begonnen was, wordt uitgebreid.

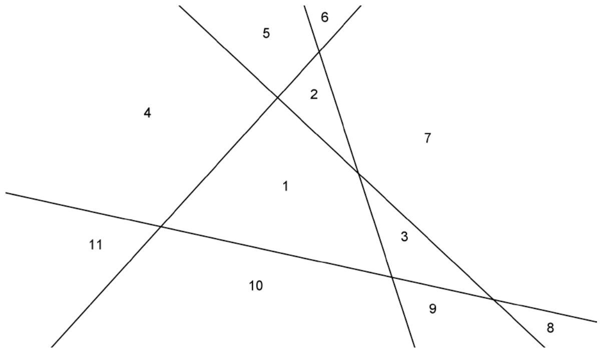
	Aantal gebieden van		
Aantal verdelers	De ruimte verdeeld door vlakken	Een vlak verdeeld door rechten	Een rechte verdeeld door punten
0	1	1	1
1	2	2	2
2	4	4	3
3	8	7	4
4	15	?	5
5	?		6
...			...
n			$n + 1$

In de laatste kolom is het gemakkelijk om een algemene formule te vinden. Het zou mooi zijn om dat ook voor de andere kolommen te kunnen doen.

Maar eerst herhaalt hij het oorspronkelijke probleem: wat gokken de studenten voor het getal onder 15 in de tweede kolom? Hij noteert de verschillende antwoorden op het bord. Een student die 26 voorstelt, mag uitleggen hoe ze eraan komt. Zij stelt vast dat elk getal in de tabel gelijk is aan de som van het getal erboven en het getal rechts van dit laatste getal. Bv. $7 = 4 + 3$; $15 = 8 + 7$. Hiermee zou er naast 15 een 11 moeten staan $(7 + 4)$, en komt er onder 15 het getal $15 + 11 = 26$.

Deze beredeneerde gok is weer het verderzetten van een vastgesteld patroon. Maar zijn deze 11 en 26 hiermee bewezen? Neen.

Hij stelt voor om alvast de gok '11' te controleren.



Figuur 3

Hij telt: 3 begrensde gebieden en daarrond 8 gebieden, samen 11.

Nu het getal '11' gecontroleerd is, is het getal '26' geloofwaardiger geworden, maar nog steeds niet bewezen. Hij deelt mee dat het inderdaad bewezen kan worden. Voor dit bewijs is er blijkbaar geen tijd meer. Hij overloopt nog eens wat hij heeft willen illustreren: het bekijken van extreme gevallen, het observeren en veralgemenen van een patroon, het gokken, het testen van een gok en het gebruik maken van analogie. Maak altijd een helder onderscheid tussen bewezen feiten en beredeneerde gokken. Geloof nooit 100% wat je gegokt hebt maar "test your guess".

Vervolg op de film

Ik kan het niet laten om nog verder na te denken. Om te verklaren waarom vijf vlakken de ruimte verdelen in 26 gebieden, keer ik terug naar de vlakke analoge situatie: vier rechten verdelen het vlak in 11 gebieden. In plaats van die 11 gebieden 'gewoon' te tellen, kunnen we ook kijken naar de manier waarop de vierde rechte nieuwe gebieden creëert. Drie rechten verdelen het vlak in 7 gebieden. De vierde rechte moet de drie vorige rechten snijden (anders is die niet 'willekeurig'). Er ontstaan op die vierde rechte dus drie punten, die deze rechte verdelen in 4 stukken. Elk van deze stukken verdeelt één van de 7 gebieden in twee. Er komen dus 4 extra gebieden bij en $7 + 4 = 11$. Dezelfde redenering kunnen we nu herhalen om te verklaren dat vijf vlakken de ruimte verdelen in 26 gebieden. Vier vlakken verdelen de ruimte in 15 gebieden. Het vijfde vlak moet elk van de vier vorige snijden, want het moet 'willekeurig' zijn. Er ontstaan in dit vijfde vlak dus vier snijlijnen. Deze vier rechten verdelen dit vlak in 11 gebieden. Elk van deze vlakdelen verdelen één van de 15 ruimtegebieden in twee. Er komen dus 11 gebieden bij en $15 + 11 = 26$.

Nadien stelde ik vast dat dit 'vervolg' op de film ook wel in de literatuur terug te vinden is. In Pólya (1954) is het voorbeeld van vlakken die de ruimte in gebieden verdelen één van de beschreven voorbeelden. Hier verklaart hij op dezelfde manier als hierboven dat het aantal gebieden bij vijf vlakken gelijk is aan 26. Bressoud (2007) en Taylor (2007) gaan nog een stap verder: zij laten hun studenten zoeken naar de algemene formules (onderaan in de tabel, zie hoger) en ze vragen ook naar een veralgemening voor de vierdimensionale ruimte.

Michel Roelens

Bronnen

Pólya, G. (1945). How to solve it, A new aspect of mathematical method, Princeton University Press

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning. Volume I Induction and analogy in mathematics*. Princeton University Press, Princeton – New Jersey, online beschikbaar op https://archive.org

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning, Volume II Patterns of plausible inference.* Princeton University Press, Princeton – New Jersey, online beschikbaar op https://archive.org

Bressoud, D. (2007). *Launchings. Pólya's art of guessing.* The mathematical association of America. http://www.maa.org/external_archive/columns/launchings/launchings_12_07.html

Taylor, P. (2007). *Cutting with planes*. Queen's University, Canada. http://www.mast.queensu.ca/~peter/inprocess/cuttingplanes.pdf

Daniel Kahneman, Ons feilbare denken Thinking, fast and slow

Business contact, Amsterdam, 2012, 527 pagina's, ISBN 978 90 470 0060 0

Een zomervakantie geeft je tijd. Tijd om te herbronnen, om energie en nieuwe ideeën op te doen, om jezelf in vraag te stellen, om wat te lezen en hierover na te denken en in het beste geval, om daarover heerlijk in discussie te gaan. Naar aanleiding van het bovenstaande boek hadden Luc (mijn collega in de lerarenopleiding lager onderwijs) en ik deugd van het opzetten van een digitale boom. Stukjes van deze discussie heb ik hier verzameld. Misschien hebben ze op jou hetzelfde effect als op ons…

Van: Luc. Verzonden: maandag 11 augustus 2014 13:54. Aan: Els. Onderwerp: boeiend

Dag Els,

Ik ben een boek aan het lezen. Dat is geen schokkend nieuws, hoewel ik het voorbije jaar minder gelezen heb dan ik zou willen.

Het boek 'Ons feilbare denken' van Daniel Kahneman heeft mij echt in de ban. Terwijl ik lees ben ik met onderwijs bezig, vooral wiskundeonderwijs, hoewel ik denk dat het voor anderen ook zijn waarde heeft.

Wat ik lees, vind ik herkenbaar en tegelijk verklarend. De gedachte 'had ik dit boek maar gelezen voor ik ooit wiskunde gaf' is tijdens het lezen een pop-up in mijn hoofd.

Kahneman beschrijft ons denken vanuit twee systemen:

– Systeem 1: snel, intuïtief, associatief …

– Systeem 2: traag, logisch, beredeneerd …

Zijn uitgangsvraag (denk ik): hebben mensen die deskundig zijn in een bepaald gebied dan ook een betere intuïtie in dat gebied?

En zijn antwoord: dat is niet zo! De deskundigheid zit in systeem 2 en intuïtie in systeem 1.

Mensen hebben een goed systeem 1 nodig om in de praktijk snelle inschattingen en keuzes te maken. In ons onderwijs richten we ons vooral op systeem 2: traag, logisch opgebouwd, beredeneerd, met controle en inzicht. En dat is ook goed. Het honoreren van systeem 1 lijkt me in ons onderwijs eerder stiefmoederlijk terwijl dit systeem toch zijn waarde heeft (en beperking, maar dat geldt ook voor systeem 2).

Een wiskundig voorbeeldje:

5 machines hebben 5 minuten nodig om 5 apparaatjes te maken. Hoelang hebben 100 machientjes nodig voor 100 apparaatjes?

Dit zijn oefeningen die verleiden om systeem 1 te gebruiken omdat de oefening transparant *lijkt*. Als systeem 2 niet wordt ingezet om hier wat kritischer naar te kijken, of om het antwoord te controleren, dan gaat een leerling in de fout.

En zo worden een aantal fouten niet gemaakt door te weinig inzicht maar door een niet accurate denkhouding …

Boeiend toch!

Luc

Zo, dit moest ik al even delen. Nu kan ik weer verder lezen.

Van: Els. Verzonden: dinsdag 12 augustus 2014 15:54. Aan: Luc. Onderwerp: RE: boeiend

Dag Luc,

Dit klinkt als een geweldig boek! Ik krijg al direct goesting om er een boom over op te zetten.

Het voorbeeldje over de machines en de apparaatjes bespreek ik ook altijd met mijn leerlingen wanneer we het onderwerp recht evenredigheid behandelen. Ik heb het er met hen over, dat recht evenredigheid voor mensen zo evident is, dat ze er niet meer over nadenken of grootheden effectief evenredig zijn. Maar dat ze het, zonder erover na te denken, toepassen. Ik doe in dit hoofdstuk altijd pogingen om deze reflex af te remmen. En hun kritische zin (systeem 2?) aan te spreken. Maar of me dat lukt…

Voor mij hebben de verbindingen tussen systeem 1 en systeem 2 ook te maken met automatisatieprocessen. Sommige kennis wordt zo grondig verworven dat je er niet meer over hoeft na te denken. Denk maar aan de optellingen tot 20 die in het eerste leerjaar erin gedrild worden. Zo komt kennis van systeem 2 in systeem 1 terecht. Misschien is dit een indicatie dat intuïtie ook voor een deel (onbewust) wordt aangeleerd.

Daarnaast weet ik niet of deskundigheid je intuïtie tegenwerkt. Wanneer je een goede wiskundige intuïtie hebt, kun je (denk ik) sneller dit soort fouten opsporen en begrijpen. Het is eerder de kritische houding die je moet ontwikkelen.

Maar ik heb geen idee of dat wat ik schrijf ook klopt. Misschien moet ik dat boek ook eens lezen…

Groet Els

Van: Luc. Verzonden: dinsdag 12 augustus 2014 17:11. Aan: Els. Onderwerp: RE: RE: boeiend

Interessant wat er gebeurt.

'k Heb één zinnetje uit je mail gehaald: "Daarnaast weet ik niet of deskundigheid je intuïtie tegenwerkt."

Ik vraag me af of dat 'iets is wat jij je afvraagt' of 'iets wat je denkt dat ik beweer en dat je in vraag wilt stellen'. In geval van het tweede: ik beweer dat niet. ☺

De uitgangsvraag in het boek is of deskundigheid op een bepaald terrein ook betekent dat je op dat terrein een goede intuïtie hebt. Intussen denk ik er al achter te zijn dat dat niet zo hoeft te zijn.

Luc

Van: Els. Verzonden: woensdag 13 augustus 2014 10:04. Aan: Luc. Onderwerp: RE: RE: RE: boeiend

Dag Luc,

Om verder te bomen op je uitgangsvraag:

Ik zocht het woord intuïtie even op (om toch maar van een definitie te vertrekken en niet van mijn intuïtie ;-)

> de intuïtie [zelfst. naamw] (v.) eigenschap dat je iets aanvoelt zonder erover te denken

of

> intuïtie: het rechtstreeks vatten van het wezen van een zaak, zonder redenering of ervaring; het primaire weten op grond van innerlijk, onberedeneerd aanvoelen

Als ik nadenk herken ik dit verschil bij mijn leerlingen. Bijvoorbeeld Maarten, die veel wiskundige intuïtie heeft en Ella die dat veel minder heeft. Ik zie Ella wel deskundigheid ontwikkelen maar het lijkt niet alsof ze daardoor meer *feeling* voor wiskunde krijgt. Elk nieuw onderdeel dat ze aanpakt blijft een worsteling waardoor ze met genoeg inspanning wel goede resultaten bereikt. Ze leert *wel* hoe ze deskundigheid kan ontwikkelen. Bij Maarten lijkt dit allemaal veel moeitelozer te verlopen. En dat komt dan door die intuïtie misschien? Als ik naar hen kijk dan lijkt het of het ontwikkelen van deskundigheid gemakkelijker gaat als je ergens intuïtie voor hebt.

Dit wordt een discussie die mijn hoofd bezig houdt. Ik ben ondertussen het boek in de bib gaan halen ☺.

Groet Els

Achteraf

Ondertussen is de vakantie afgelopen en is de school opnieuw gestart. Het boek houdt me nog steeds bezig. Ook al zijn systeem 1 en 2 maar een manier om ons denken te beschrijven, toch vind ik het soms een handig hulpmiddel om te beoordelen wat er in de klas gebeurt.

Daarnaast… bleek het voorbeeld van 'de machines en de apparaatjes' nog maar het topje van de ijsberg. Een ander interessant item van het boek was de kritische zin die Kahneman aan de dag legt over statistisch onderzoek en de interpretatie ervan. Zoals het onderwerp van onze discussie al was: boeiend!

Luc Bastiaensen en Els Van Emelen

Jaaroverzicht

Jaargang 30

Het spinnenweb

Onder de loep

De bibwijzer